# Lektion 2

# Unsicherheiten

LERNZIELE

Nach Abschluss dieser Lektion werden Sie Folgendes gelernt haben...

- wie man die Arten der Unsicherheit als statistisch oder systematisch klassifiziert.

- die beiden gebräuchlichen Maße für Unsicherheit: Varianz und Standardabweichung.

- wie man die Varianz von linearen Funktionen von Zufallsvariablen berechnet.

- wie man die Varianz von nichtlinearen Funktionen von Zufallsvariablen näherungsweise bestimmt (approximiert).

# 2. Unsicherheiten

### Einführung

Es soll eine Tischplatte mit den Sollmaßen von 300 cm Länge und 100 cm Breite hergestellt werden. Der Schreiner verleimt fünf unterschiedlich lange Bretter, die jeweils X breit sind, wobei E X = 20cm und V X = 0 . 5cm2. Nachdem die Tischplatte ausgehärtet ist, schneidet er die beiden Enden der Tischplatte ab, so dass die endgültige Länge Y mit E Y = 300cm und V Y = 1cm2 beträgt. Nehmen wir an, dass wir an der Modellierung der Fläche eines Tisches interessiert sind. Wir können annehmen, dass jedes Brett eine Länge X1,X2, ...,X5 iid mit E Xi = 20 und V Xi = 0.5 für i = 1, ..., 5 und eine Länge Y unabhängig von Xi aufweist. (Erinnern Sie sich daran, dass iid für "unabhängig und identisch verteilt" steht.) Somit beträgt die Fläche Z = X1 + X2 + ⋯ + X5 Y. Die erwartete Fläche beträgt E Z = 30.000cm2. Wie sieht es mit der Varianz aus? Die Unsicherheiten (Varianzen) der Xi's und von Y werden sicherlich etwas zur Unsicherheit der Fläche beitragen. In dieser Lektion lernen wir, wie man Unsicherheiten quantifiziert und wie sie sich durch Funktionen von Zufallsvariablen fortpflanzen.

Außerdem lernen wir, wie man mit einzelnen Größen verbundene Unsicherheiten mit Hilfe von Varianz und Standardabweichung quantifizieren kann. Im ersten Abschnitt lernen wir, Unsicherheiten als statistische oder systematische Unsicherheiten zu identifizieren. Wir werden Beispiele für beide Arten von Unsicherheiten besprechen und auch, wie man sie angibt. Insbesondere werden wir den Unterschied zwischen einem systematischen Fehler und einer systematischen Unsicherheit herausarbeiten.

In Abschnitt 2.2 werden wir die Eigenschaften der Varianz bewerten und diese Eigenschaften nutzen, um Formeln für die Fortpflanzung von Unsicherheiten in einigen einfachen Fällen (d. h. in linearen Funktionen von Zufallsvariablen) zu erlernen. Wir werden sehen, dass, wenn die zugrunde liegenden Variablen unabhängig sind, die Übertragung von Fehlern der Zufallsvariablen auf die linearen Funktionen recht einfach ist. In der Praxis kann es jedoch vorkommen, dass die zugrunde liegenden Zufallsvariablen, mit denen wir arbeiten, nicht unabhängig sind, sondern miteinander korrelieren. Wir werden die Definition der Kovarianz, die die Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen misst, erneut betrachten und diese Größe zusammen mit den einzelnen Unsicherheiten in den Variablen verwenden, um die Unsicherheiten auf eine lineare Funktion zu übertragen. Für den Fall, dass die interessierende Größe eine nichtlineare Funktion von Zufallsvariablen ist, sind einfache Formeln nicht mehr möglich. Und selbst wenn wir uns für komplizierte Formeln entscheiden, werden wir sie in der Praxis nicht anwenden können, wenn wir nur die Varianz- und Kovarianzgrößen der zugrunde liegenden Zufallsvariablen verwenden. Daher werden wir lernen, wie man die mit Funktionen von Zufallsvariablen verbundenen Unsicherheiten approximieren kann.

Bei der statistischen Inferenz erhalten wir mit Hilfe von Statistiken, die anhand einer endlichen Stichprobe erhoben wurden, Aufschluss über die Aussagen, die über die Daten gemacht werden. Die Formeln, die wir zur Berechnung dieser Statistiken verwenden, sind Funktionen von Zufallsvariablen. Wir müssen verstehen, wie viel Unsicherheit mit den von uns berechneten Statistiken verbunden ist, ohne dass wir das Experiment viele Male wiederholen müssen. Die Ergebnisse dieser Lektion geben Aufschluss über solche Unsicherheiten der Statistiken.

## 2.1 Statistische und systematische Unsicherheiten

Statistische Schlussfolgerungen beruhen auf Daten, die durch verschiedene Methoden gewonnen werden, z. B. durch das Zählen der einzelnen Besucher:innen einer Website, das Wiegen eines Schmuckstücks oder das Messen der Länge eines Exemplars mit einem Stahllineal. In einer idealen Welt erwarten wir bei wiederholten Messungen das gleiche Ergebnis. In der Praxis ist dies jedoch nicht der Fall. Bei wiederholten Messungen erhalten wir oft unterschiedliche Ergebnisse. Wenn eine Probe ordnungsgemäß gelagert wird und ein Forschender im Jahr 2008 die Länge mit einem Stahllineal misst und dieselbe Probe im Jahr 2010 von demselben Forschenden mit demselben Lineal gemessen wird, kann es zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen, weil sich das Lineal aufgrund von Temperaturänderungen ausdehnt. Ohne Aufzeichnung der Temperaturen bei den ursprünglichen Messungen gäbe es keine Möglichkeit, den Messfehler zu korrigieren. Dies ist ein Beispiel dafür, dass die Messung mit einer **systematischen Unsicherheit** behaftet ist. Wenn sich zum Beispiel das Lineal ausdehnt, wären die neuen Messwerte systematisch kürzer als die wahre Länge. Wenn wir Fehler aufgrund dieses Effekts korrigieren könnten, hätten wir keine systematische Unsicherheit; in der Praxis ist es sehr schwierig, systematische Unsicherheiten zu erkennen.

**Systematische Unsicherheit**

Dabei handelt es sich um Unsicherheiten in den Messwerten, die nicht statistisch sind.

Es gibt jedoch Fälle, in denen die Fehler auf systematische Fehler und nicht auf systematische Unsicherheiten zurückzuführen sind. Angenommen, wir haben ein Messgerät, das bei einer bestimmten Temperatur kalibriert wurde, weil bekannt ist, dass Temperaturänderungen die Messung einer Probe beeinflussen. Nehmen wir außerdem an, dass es keine Möglichkeit gibt, dieses Gerät neu zu kalibrieren. Wenn wir dieses Gerät in einer Umgebung verwenden, in der die Temperatur drastisch abweicht, und wir entweder nichts von diesem Effekt wissen oder ihn einfach ignorieren, dann werden die erhaltenen Messungen systematisch von den wahren Werten abweichen (z. B. höher sein). Dies ist ein Beispiel für einen systematischen Fehler. Wenn wir uns jedoch des Effekts bewusst sind und die Messungen (z. B. durch Subtraktion einer festen oder proportionalen Größe) auf der Grundlage des von den Naturgesetzen vorhergesagten Effekts korrigieren, dann haben wir den systematischen Fehler korrigiert und es gibt keine systematische Unsicherheit (oder Fehler). Eine weitere Möglichkeit besteht darin, dass wir den Effekt zwar kennen, uns aber nicht sicher sind, bei welcher Temperatur das Gerät ursprünglich kalibriert wurde. Da wir keine Möglichkeit haben, das Gerät zu kalibrieren, können wir die systematischen Unterschiede in den erhaltenen Messwerten nicht korrigieren. In diesem dritten Szenario hätten wir eine systematische Unsicherheit in Verbindung mit den Messungen.

Nehmen wir nun an, wir messen das Gewicht eines Schmuckstücks, beispielsweise eines Goldrings. Wir legen ihn auf unsere digitale Waage, die korrekt geeicht ist (um systematische Unsicherheiten zu vermeiden), aber bei drei wiederholten Messungen erhalten wir 14 . 25, 14 . 23, 14 bzw. 28 Gramm. Wir können die Unsicherheit durch die Standardabweichung der Stichprobe quantifizieren:

Xxx

Die Unsicherheit beträgt etwa 0 . 0006 Gramm zum Quadrat. Die Standardabweichung der Stichprobe ist ein gleichwertiges Maß, steht allerdings in denselben Einheiten wie die Messungen (Daten)

xxx

Die Unsicherheit beträgt also etwa 0 . 0252 Gramm. Es ist üblich, x Å} s = 14 zu schreiben. 2533 Å} 0 . 0252. Im Gegensatz zu systematischen Fehlern lassen sich statistische Fehler durch eine größere Anzahl von Messwerten (mehr Messungen am Ring) verringern. Wenn eine Gaußsche Verteilung (Normalverteilung) verwendet werden kann, verringert sich die Unsicherheit (Standardabweichung) proportional auf 1/ n. Die unterschiedlichen Werte, die wir für das Gewicht dieses Rings erhalten haben, sind auf die dem Ring oder der Waage innewohnende Zufälligkeit zurückzuführen. Vielleicht befinden sich kleine Teilchen mit einem gewissen Gewicht auf der Waage oder am Ring. Unsicherheiten, die auf inhärente Zufälligkeiten in den Daten selbst zurückzuführen sind, werden als **statistische Unsicherheit bezeichnet**.

**Statistische Unsicherheit**

Diese Art von Unsicherheit hängt mit der zugrunde liegenden Zufälligkeit des Messprozesses oder der gemessenen Größe zusammen. Sie kann durch Erhebung von mehr Daten reduziert werden.

Wäre die Digitalwaage nicht richtig geeicht, wäre das Experiment der wiederholten Messung des Rings sowohl mit systematischen als auch mit statistischen Unsicherheiten behaftet. In diesem Fall könnten wir unsere Schätzung wie folgt zusammenfassen:

xxx

Im Allgemeinen können systematische Unsicherheiten durch den Erwerb von mehr Wissen und die Einbeziehung dieses Wissens in den Messprozess verringert werden. Statistische Unsicherheiten können durch den Erwerb von mehr Daten verringert werden.

Statistische Unsicherheiten sind durch die Varianz (und die Standardabweichung) definiert. X sei eine Zufallsvariable. Ihre Varianz und Standardabweichung sind definiert durch

xxx

Im nächsten Abschnitt werden wir die Unsicherheiten von Zufallsvariablen erörtern, die auf zwei oder mehr anderen Zufallsvariablen beruhen. Wenn die letztgenannten Zufallsvariablen eine gewisse Abhängigkeit aufweisen, müssen wir diese Abhängigkeit berücksichtigen. Die Standardmethode zur Messung der Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen ist ihre Kovarianz. X1 und X2 seien zwei Zufallsvariablen, deren Kovarianz wie folgt definiert ist

xxx

## 2.2 Fortpflanzung von Unsicherheiten

Angenommen, eine Zufallsvariable Y steht für die Menge, die wir messen möchten, aber nicht messen können. Stattdessen können wir X messen und wissen, wie X und Y zusammenhängen. Wenn wir also einen Wert für X haben, können wir den entsprechenden Wert für Y berechnen. Da sie mit X verbunden sind, gibt es Unsicherheiten in Verbindung mit Y. In diesem Abschnitt wollen wir verstehen, wie sich diese Unsicherheiten von X auf Y übertragen.

Angenommen, ein langes Geländer wird in zwei Teilen hergestellt und soll vor Ort zusammengefügt werden. X1 und X2 bezeichnen die Längen der beiden Teile. Y = X1 + X2 ist die Gesamtlänge des Geländers nach der Montage. Wir möchten die Unsicherheit von Y während des Herstellungsprozesses abschätzen. Dazu nehmen wir Messungen an den beiden Teilen vor, berechnen die damit verbundenen Unsicherheiten und finden heraus, wie sich diese Unsicherheiten auf Y, die Gesamtlänge, auswirken.

### Lineare Funktionen

Beginnen wir mit einigen grundlegenden Begriffen. X sei eine Zufallsvariable. Wir bezeichnen die Varianz und die Standardabweichung von X mit σX 2 = V X bzw. σX = V X. Das Hinzufügen einer nicht zufälligen (konstanten) Größe zu einer Zufallsvariablen ändert nicht deren Varianz:

V X + c = V X .

Für zwei Zufallsvariablen X1 und X2 wird ihre Kovarianz mit σ12 = Cov X1,X2 bezeichnet.

Man beachte, dass σ12 = σ21 = Cov X2,X1 . Erinnern Sie sich an die folgenden Formeln aus der Wahrscheinlichkeitstheorie für die Varianz der Summe/Differenz von zwei Zufallsvariablen X1 und X2:

xxx

Wenn die Kovarianz Null ist, was bei unabhängigen Variablen der Fall ist, dann reduziert sich die Formel auf

xxx

Erinnern wir uns nun an die Formel für die Varianz eines nicht zufälligen Vielfachen (a) einer Zufallsvariablen

X:

Xxx

Die Kovarianz ist linear in ihren beiden Argumenten; mit anderen Worten: für die Zufallsvariablen X1 und X2 und die Skalare a und b gilt

xxx

Kombiniert man die Ergebnisse der obigen Gleichungen, erhält man die folgende Formel für die Varianz einer Linearkombination zweier Zufallsvariablen X1 und X2, wobei a1 und a2 nicht zufällige Skalare sind:

xxx

Noch einmal: wenn die Kovarianz Null ist, σ12 = 0, dann reduziert sich die obige Formel auf

Xxx

#### Beispiel 2.2.1

Berechnen Sie die folgenden Varianzen für die Zufallsvariablen X1 und X2 mit σ1 2 = 2, σ2 2 = 3 und σ12 = - 1:

x

x

x

#### Lösung

1. Mit einer der obigen Formeln erhält man V X1 + X2 = σ1 2 + σ2 2 + σ12 = 2 + 3 - 1 = 4

2. Mit einer der obigen Formeln erhält man V 10X1 = 102σ1 2 = 100 . 2 = 200

3. Mit einer der obigen Formeln erhält man

Xxx

#### Beispiel 2.2.2

X1, ...,Xn seien unabhängige Zufallsvariablen. Ermitteln Sie die Varianz des Stichprobenmittelwerts,

X = 1n

Σ

i = 1

n

Xi

#### Lösung

Wie zuvor setzen wir σi = V Xi für i = 1, ..., n. Zunächst können wir die Formel für die Varianz eines nicht zufälligen Vielfachen von oben mit a = 1/n verwenden

xxx

Da die Variablen unabhängig sind, gilt Cov Xi,Xj = 0 für i ≠ j.

Um die Varianz der Summe zu ermitteln, können wir also einfach die Formel aus der Varianzformel für die Summe zweier Zufallsvariablen erweitern

xxx

#### Beispiel 2.2.3

X1, ...,Xn seien iid mit V X = σ2, d. h., sie haben alle die gleiche Varianz. Wie groß ist die Varianz des Stichprobenmittelwerts V X ?

#### Lösung

Wir können das Ergebnis des vorherigen Beispiels mit σi 2 = σ2 für i = 1, ..., n verwenden und erhalten

xxx

Es sei daran erinnert, dass der Stichprobenmittelwert X ein unverzerrter Schätzer des Populationsmittelwerts μ 1 = μ ist.

Als Schätzer betrachtet, wird die Standardabweichung von X als Standardfehler des Stichprobenmittelwerts bezeichnet. Unter Verwendung des Ergebnisses aus der Gleichung zur Varianz des Stichprobenmittelwertschätzers ergibt sich

xxx

Der Standardfehler eines Schätzers ist die Standardmethode zur Angabe der mit ihm verbundenen Unsicherheit. Wenn die Standardabweichung der Grundgesamtheit (σ) unbekannt ist, können wir σ2 durch sn 2, die Stichprobenvarianz, ersetzen

xxx

### Nichtlineare Funktionen

Bisher haben wir mit Zufallsvariablen X1, ...,Xn gearbeitet, für die die Unsicherheiten bekannt sind, und wir haben die Unsicherheiten von linearen Funktionen dieser Variablen berechnet, d. h. Y = X1 + X2, Y = 10X1, Y = 2X1 - 3X2, Y = X. Oft ist die Größe, an der wir interessiert sind, keine lineare Funktion, d. h. Y = f X1,X2 , wobei f nichtlinear ist. Die Berechnung der Unsicherheiten von Y ist in solchen Fällen äußerst schwierig. Stattdessen verwenden wir Formeln, die darauf abzielen, V Y zu approximieren. Um diese Schwierigkeit zu veranschaulichen, berechnen wir die Varianz eines Produkts aus zwei unabhängigen Zufallsvariablen und beachten die übliche Näherungsformel.

#### Beispiel 2.2.4

X1 und X2 seien unabhängige Zufallsvariablen mit den Varianzen σ1 2 bzw. σ2 2.

Wie groß ist die Varianz von Y = X1X2?

#### Lösung

Aus der Definition der Varianz ergibt sich Xxx,

wobei sich die zweite Gleichheit aus E X1X2 = E X1 E X2 ergibt, was gilt, da die Variablen unabhängig sind. Bezeichnen wir μ1 = E X1 und μ2 = E X2. Nun ergibt sich E X1 2 = V X1 + μ1 2 = σ1 2 + μ1 2 und E X2 2 = V X1 + μ2 2 = σ2 2 + μ2 2 . Setzt man diese Ergebnisse ein, so erhält man

xxx

Die Formel zur Approximation der Unsicherheit von Y = X1X2, wobei X1 und X2 unabhängig sind, lautet

xxx

#### Beispiel 2.2.5

X1 und X2 seien unabhängig mit μ1 = 2, μ2 = 3, σ1 = 0 . 2 und σ2 = 0 . 4. Berechnen Sie die Varianz von Y = X1X2 mit Hilfe der exakten Formel und der Näherungsformel. Vergleichen Sie beide anhand des relativen Näherungsfehlers.

#### Lösung

Wir beginnen mit der Berechnung der exakten Varianz aus dem Ergebnis von Beispiel 2.2.4:

**Variationskoeffizient**

Eine Größe zur Messung der relativen Unsicherheit, d. h. das quadrierte Verhältnis der Standardabweichung zur Zufallsvariablen.

xxx

Mit Hilfe der Näherungsformel, die die Varianz eines Produkts unabhängiger Zufallsvariablen näherungsweise bestimmt, erhält man

xxx

Der Fehler beträgt 1 . 0064 - 1 = 0 . 0064, und der relative Fehler beträgt 0 . 0064/1 . 0064 ≈ 0 . 636% und ist damit recht gering.

Die allgemeine Formel zur Approximation der Varianz eines Produkts zweier Zufallsvariablen

Y = X1X2 lautet

Xxx

In der Praxis ist die Interpretation der Varianz einer Größe allein nicht ausreichend. Wir wollen sehen, wie sie im Vergleich zum gemessenen Wert steht. Anstatt also nur die Varianz einer Zufallsvariablen Y mit Hilfe von σY 2 zu untersuchen, wollen wir den mit der Zufallsvariablen verbundenen **Variationskoeffizienten** untersuchen. Diese Größe ist das Verhältnis σY/Y 2. Daher werden die folgenden Formeln für verschiedene nichtlineare Funktionen von X1 und X2 in Form des Bestimmtheitsmaßes angegeben:

xxx

Natürlich sind die nichtlinearen Funktionen, die wir in der Praxis antreffen, vielfältiger als nur Produkte oder Quotienten. Daher benötigen wir eine allgemeine Methode zur Übertragung von Unsicherheiten. Die Formeln, die wir bisher eingeführt haben, verwenden eine Linearisierung der Funktion, die durch die Taylorreihe gegeben ist. Wir erinnern uns, dass für Y = f X die (lineare) Taylor-Approximation erster Ordnung, zentriert auf a, gegeben ist durch Y ≈ f a + f′ a X - a. Für unsere Aufgabe wählen wir a = μ = E X, so dass Y = f X ≈ f μ + f′ μ X - μ . Mit Hilfe der Formel für die Varianz eines nicht zufälligen Vielfachen einer Zufallsvariablen erhält man dann

xxx

#### Beispiel 2.2.6

X sei eine Zufallsvariable mit dem Mittelwert μ = E X und der Varianz σ2 = σX 2 . Verwenden Sie das Ergebnis der Linearisierung, um die Varianz von Y = logX zu approximieren.

#### Lösung

Die Ableitung lautet f′ X = 1X , also f′ μ = 1μ. Daher gilt: σY 2 = V Y ≈ σ2

μ2

Wir betrachten nun eine Funktion von zwei (Zufalls-)Variablen, Y = f X1,X2 . Die (lineare) Taylor-Approximation erster Ordnung von f, zentriert auf den Mittelwert μ1, μ2 = E X1 , E X2 , ist gegeben durch

Xxx

Der Einfachheit halber verwenden wir die Abkürzung

Xxx

und

Xxx

Mit dieser Notation ergibt sich

Xxx

Nach der Formel für die Summe von zwei Zufallsvariablen ergibt sich

Xxx

#### Beispiel 2.2.7

Es seien X1, X2 und Y = f X1,X2 = X1X2. Verwenden Sie die obige Formel, um die Varianz von Y zu approximieren.

#### Lösung

Wir beginnen mit der Berechnung der partiellen Ableitungen zum Mittelwert μ1, μ2

xxx

Wendet man nun die Formel an, erhält man

Xxx

#### Beispiel 2.2.8

Es seien X1, X2 und Y = f X1,X2 =X1

X2. Nehmen wir außerdem an, dass μ2 = E X2 > 0 ist. Verwenden Sie die Formel, die die ungefähre Varianz einer Funktion von zwei Zufallsvariablen angibt, um die Varianz von Y zu approximieren.

#### Lösung

Wir beginnen mit der Berechnung der partiellen Ableitungen zum Mittelwert μ1, μ2

xxx

und

xxx

Wendet man nun die Formel an, erhält man

Xxx

### Allgemeine Formeln

X1, ...,Xn seien Zufallsvariablen mit bekannten Varianzen und Kovarianzen. Wir bezeichnen den Zufallsvektor X = X1, ...,Xn . Die Unsicherheiten lassen sich durch die Varianz-Kovarianz-Matrix zusammenfassen, die wie folgt lautet

xxx

Die Diagonalelemente dieser Matrix enthalten die Varianzen jeder der Zufallsvariablen und die Off-Diagonalelemente enthalten die entsprechenden Kovarianzen σij = Cov Xi,Xj . Y sei eine lineare Funktion (Transformation) der X-Werte: Y = a1X1 + ⋯a2Xn. Definieren Sie dann eine (Zeilen-)Matrix A durch

xxx

und Sie erhalten Y = AX. Die Unsicherheiten von Y können mit der folgenden Formel berechnet werden

xxx

#### Beispiel 2.2.9

Nehmen wir an, Y = 2X2 + 3X2 mit X = X1,X2 , mit der Varianz-Kovarianz-Matrix

xxx

Verwenden Sie die obige Formel, um V Y zu berechnen.

#### Lösung

Zunächst wird die Matrix notiert, die Y ergibt:

xxx

Nach der Formel ergibt sich

xxx

Manchmal haben wir mehr als eine Messung, für die wir Unsicherheiten ermitteln müssen. Wenn wir zum Beispiel Y = Y1, ...,Ym und m Messungen haben, von denen jede eine lineare Funktion der Xi-Werte ist, sagen wir

xxx,

können wir die Matrix A wie folgt definieren

xxx

und schreiben die Beziehung als Y = AX. Die in Y enthaltenen Unsicherheiten können dann anhand ihrer eigenen Varianz-Kovarianz-Matrix zusammengefasst werden: V Y = VY = AVXAT. Obwohl die Formel genauso aussieht wie zuvor, ist das Ergebnis keine Zahl, sondern eine Matrix mit m Zeilen und m Spalten.

#### Beispiel 2.2.10

Es seien Y1 = X1 + 2X2 und Y2 = 2X1 + X2, wobei X = X1, X2 mit der Varianz-Kovarianz-Matrix

xxx

Berechnen Sie anhand der Matrix VY = V Y für Y = Y1,Y2 .

#### Lösung

Wie zuvor definieren wir die Matrix A

xxx

Als Nächstes nutzen wir die Formel

Xxx

Im obigen Beispiel ergab die Formel alle Unsicherheiten, die wir möglicherweise über Y wissen wollen. Zum Beispiel: V Y1 = 2, V Y2 = 26 und Cov Y1,Y2 = 4.

### Linearisierung von nichtlinearen Funktionen

Im allgemeinsten Fall ist jede der Zufallsvariablen in Y = Y1, ...,Ym eine (möglicherweise) nichtlineare Funktion in X = X1, ...,Xn . In diesem Fall würden wir die linearen Taylor-Approximationen (erster Ordnung) verwenden, die auf die Mittelwerte μ = μ1, ..., μn der Funktion in Y zentriert sind, um folgende Matrix zu erhalten

xxx

wobei ∂ij : =∂Yi

∂Xj μ für i = 1, ...,m und j = 1, ..., n. Dann können wir die Varianz-Kovarianz-Matrix VY approximieren mit

xxx

#### Beispiel 2.2.11

Es sei Y = X1X2,X1/X2 . Unter der Voraussetzung, dass VX =20 -10-10 10 und μ = 1, 2 für X = X1,X2 , verwenden Sie den Näherungswert aus der obigen Formel, um VY zu approximieren.

#### Lösung

Zunächst berechnen wir die Elemente in B: ∂11 = μ2 = 2, ∂12 = μ1 = 1, ∂21 = 1/μ2 = 1/2, und ∂22 = - 1/4. Als nächstes verwenden wir die Näherungsformel

Xxx

### Zusammenfassung

In dieser Lektion haben wir zwei Hauptarten von Unsicherheiten definiert und erläutert: statistische und systematische Unsicherheiten. Wir haben gelernt, dass systematische Unsicherheiten aus unkorrigierten Fehlern bei der Durchführung von Messungen entstehen und nicht durch das Sammeln weiterer Daten verringert werden können. Statistische Unsicherheiten ergeben sich aus der inhärenten Zufälligkeit, die mit der gemessenen Größe verbunden ist, und können durch das Sammeln von mehr Daten (Durchführung von mehr Messungen) verringert werden.

Unsicherheiten werden anhand der Varianz (oder Standardabweichung) quantifiziert, und auch die Beziehungen zwischen zwei Variablen, die durch ihre Kovarianz quantifiziert werden, spielen eine Rolle. Wenn X eine Zufallsvariable ist, dann sind ihre Varianz und Standardabweichung definiert durch

xxx

Für zwei Zufallsvariablen X1 und X2 ist die Kovarianz Cov X1,X2 definiert durch

xxx

Die Fortpflanzung von Unsicherheiten ist bei der Untersuchung von Unsicherheiten von entscheidender Bedeutung. Wir sind oft an einer transformierten (aggregierten) Größe interessiert, die auf messbaren Größen basiert. Wir können die mit den gemessenen Größen verbundenen Unsicherheiten messen, nicht aber die Unsicherheit der interessierenden Größe.

In Abschnitt 4.2 haben wir einige Formeln erörtert, die berechnen, wie Unsicherheiten in den interessierenden Größen (transformierte Größen) auf den Unsicherheiten der zugrunde liegenden Messgrößen basieren. Wenn die interessierende Größe eine lineare Transformation der zugrunde liegenden Größen war, haben wir exakte Formeln für die Unsicherheit der interessierenden Größe angegeben. Für den Fall, dass die Transformation nicht linear war, haben wir eine ähnliche Formel angegeben, die die Unsicherheit der interessierenden Größe approximiert. X1, ...,Xn seien n Zufallsvariablen. Wir fassen ihre Unsicherheiten und Abhängigkeiten über die Varianz-Kovarianz-Matrix VX zusammen, wobei X = X1, ...,Xn . Diese Matrix ist n Å~ n, deren Diagonalelemente die Varianzen der Zufallsvariablen sind und die Einträge außerhalb der Diagonalen die Kovarianz des jeweiligen Paares (Zeilen-/Spaltenzahl) der Zufallsvariablen enthalten. Für jede m Å~ n-Matrix A ist die Varianz-Kovarianz-Matrix von Y = AX, die die Unsicherheiten und Abhängigkeiten der interessierenden Größen im Zufallsvektor Y = Y1, ...,Ym zusammenfasst, gegeben durch

xxx

Dies ist die Formel für eine lineare Transformation. Wenn Y = f X ist, wobei f :ℝn ℝm eine (möglicherweise) nichtlineare Funktion ist, dann definieren wir die Matrix B, welche die Jacobimatrix ist (und die partiellen Ableitungen enthält), bewertet am mittleren Vektor μ = E X = E X 1, ..., E X n . Die Unsicherheiten in Y können mit der folgenden Gleichung approximiert werden

xxx