**1.1**

1. Das erste Moment einer Zufallsvariablen X ist . Schreiben Sie für eine gegebene Stichprobe , die entspricht, den Schätzer für das erste Moment unter Verwendung des Stichprobenmoments auf. Wie lautet die entsprechende Schätzung?

*Schätzer:*

*Schätzung:*

2. Was ist der Unterschied zwischen einem Schätzer und einer Schätzung?

*Ein Schätzer ist eine Zufallsgröße, die anhand der Zufallsvariablen berechnet wird, die der beobachteten Stichprobe entsprechen. Eine Schätzung ist ein nicht zufälliger Wert, den der Schätzer anhand der beobachteten Stichprobe berechnet.*

3. Richtig oder falsch?

Die Momentenmethode liefert Schätzer, die immer unverzerrt sind.

* Richtig
* *Falsch*

4. sei eine beobachtete Stichprobe aus einer Bernoulli-Verteilung mit unbekanntem Parameter . Verwenden Sie die Momentenmethode, um einen Schätzer für zu berechnen Verwenden Sie die beobachtete Stichprobe, um den Momentenschätzer zu ermitteln.

d. h. das erste Moment für . Somit ist das Stichprobenmoment der Momentenschätzer für . Die Schätzung lautet .

**1.2**

1. Richtig oder falsch?

und seien eine Zufallsstichprobe aus einer Bernoulli-Verteilung. Die Statistik ist eine suffiziente Statistik zur Schätzung von , der Erfolgswahrscheinlichkeit.

* *Richtig*
* Falsch

2. Wenn eine suffiziente Statistik für die Schätzung eines unbekannten Parameters, ist, dann können die einzelnen Datenpunkte immer noch Informationen zur Schätzung von enthalten.

* Richtig
* *Falsch*

3. sei eine Statistik zur Schätzung eines unbekannten Parameters . seien eine Zufallsstichprobe und die beobachtete Stichprobe. Wenn die Wahrscheinlichkeit von ist, kann man daraus schließen, dass eine suffiziente Statistik zur Schätzung von ? Bitte erläutern Sie dies.

*Ja. Wir können schreiben , wobei und . Also ist nur abhängig von und (nicht von den einzelnen Datenpunkten), und hängt nicht ab von . Das Likelihood-Faktorisierungskriterium stellt sicher,* dass  *eine suffiziente* *Statistik zur Schätzung von ist.*

**1.3**

1. Wir können die Likelihood-Funktion maximieren, indem wir die negative Log-Likelihood-Funktion *minimieren*.

2. seien iid von und sei eine beobachtete Stichprobe. Die negative Log-Likelihood-Funktion ist gegeben durch . Ermitteln Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung für .

*Antwort:*

3. Angenommen, wir haben aus einer Exponentialverteilung mit unbekanntem Mittelwert . Verwenden Sie das Ergebnis aus Beispiel 1.3.2, um die MLE-Schätzung für zu ermitteln.

*Aus dem Ergebnis des Beispiels ergibt sich*  , also.

4. Verwenden Sie die beobachteten Daten und das Ergebnis von Frage drei, um die Varianz der zu ermitteln.

*Die negative Log-Likelihood-Funktion und ihre ersten beiden Ableitungen lauten*:

*Unter Verwendung der Gleichung für die Varianz des MLE ergibt sich dann*

**1.4**

1. Ist es notwendig, die Verteilung zu kennen, aus der die Daten stammen, um die gewöhnliche Methode kleinster Quadrate zu verwenden?

*Nein, es ist nicht notwendig, die Verteilung zu kennen. Erforderlich ist lediglich die Kenntnis des Modells oder der Funktion, die die Abhängigkeit der Daten angibt.*

2. Was ist ein Residuum eines Datenpunktes?

*Ein Residuum eines Datenpunktes ist die Differenz zwischen dem beobachteten Wert und dem Wert, den ein Modell/eine Funktion vorhersagt.*

3. Wie wird die OLS-Schätzung eines unbekannten Parameters in Bezug auf die Residuen charakterisiert?

*Die OLS-Schätzung ist der Wert des Parameters, der die Summe der quadrierten Residuen minimiert.*

4. Angenommen, dass die OLS-Schätzung für ist und eine andere Schätzung ist. Welche Schätzung führt zu einer höheren Summe der quadratischen Residuen?

*wird zu einer höheren Summe der quadratischen Residuen führen als*

**1.5**

1. Wie unterscheiden sich die Stichprobenwiederholungs- (Resampling-)Verfahren von der Bootstrap- und der Jackknife-Methode?

*Die Bootstrap-Stichprobe ist eine Ersatzstichprobe aus der beobachteten Stichprobe, und jede Bootstrap-Stichprobe hat den gleichen Umfang wie die ursprüngliche Stichprobe. Beim Bootstrap wird ein Wert aus der beobachteten Stichprobe entfernt, so dass jede Jackknife-Stichprobe um einen Wert kleiner ist als die ursprüngliche Stichprobe.*

2. Angenommen, dass vier Bootstrap-Schätzungen sind, wobei für steht Angenommen, dass die Schätzung aus der ursprünglichen Stichprobe ist. Ermitteln Sie den Bootstrap-Standardfehler für .

*Unter Verwendung der Formel für den Bootstrap-Standardfehler mit ergibt sich*

3. Schreiben Sie alle Jackknife-Wiederholungen auf, die der beobachteten Stichprobe entsprechen .

*Antwort:* , , ,

4. Angenommen, dass die Schätzungen sind, wobei aus vier Jackknife-Wiederholungen für eine beobachtete Stichprobe des Umfangs vier stammen. Ermitteln Sie den Jackknife-Standardfehler.

*Zunächst muss die Jackknife-Schätzung als Stichprobenmittelwert der vier Jackknife-Schätzungen berechnet werden:*

*Als Nächstes wird die Formel für den Standardfehler der Jackknife-Schätzung verwendet, um den Standardfehler zu berechnen:*

**2.1**

1. Markieren Sie die richtige Option. Welche Art(en) von Unsicherheit kann/können durch die Erfassung von mehr Daten verringert werden?

* sowohl systematische als auch statistische Unsicherheiten
* nur systematische Unsicherheiten
* *statistische Unsicherheiten*

2. Die Unsicherheit, die durch die Zufälligkeit der zu messenden Größe entsteht, wird bezeichnet als

* systematisch
* *statistisch*

3. Richtig oder falsch?

Ein Thermometer, das auf einen unbekannten Temperaturbereich geeicht ist, wird zur Messung der Temperatur in einem viel höheren Bereich verwendet. Die Unsicherheiten der mit diesem Thermometer durchgeführten Messungen werden durch systematische Unsicherheiten beeinträchtigt.

* *Richtig*
* Falsch

4. Richtig oder falsch?

Sie wiegen sich wiederholt auf einer Waage, indem Sie die Waage an leicht unterschiedlichen Stellen auf den nicht vollkommen ebenen Boden stellen. Der Unterschied in den Gewichtsmessungen, die mit dieser Methode erzielt werden, wird als systematische Unsicherheit eingestuft.

* Richtig
* *Falsch*

**2.2**

1. Bei , und berechnen Sie die genaue Varianz von .

*Antwort: 2*

2. Berechnen Sie anhand der Werte aus Frage 1 die genaue Varianz von .

*Antwort: 2*

3. Bei , schätzen Sie die Varianz von

*Antwort: 1/8 oder 0,125*

4. Bei , , , und approximieren Sie die Varianz-Kovarianz-Matrix von

*Antwort:*

**3.1**

1. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Welche dieser vier Größen ist konstant und hängt nicht von dem interessierenden Parameter ab?

* *Evidenz*
* Posterior
* Wahrscheinlichkeiten
* Prior

2. Geben Sie die proportionale Beziehung zwischen den Größen Likelihood, Prior und Posterior an.

*Antwort:*

3. Geben Sie zwei mögliche zusammengesetzte Ungleichungen mit den Größen , und an.

Antwort: oder

4. Schreiben Sie unter Verwendung der A-priori-Verteilung, und 25 beobachteten Werten von mit die A-posteriori-Verteilung, und die Bayes-Schätzung (Mittelwert) unter Verwendung der Formeln aus diesem Abschnitt auf.

Antwort: ,

**3.2**

1. Richtig oder falsch?

Eine flache (konstante) falsche Prior kann zu einer richtigen Posterior führen.

* *Richtig*
* Falsch

2. Richtig oder falsch?

Bei einem festen Stichprobenumfang liegt die Bayes-Schätzung näher an der MLE-Schätzung, wenn eine gleichförmige Prior statt einer subjektiven Prior verwendet wird.

* *Richtig*
* Falsch

3. Geben Sie die Definition der Fisher-Information, , eines Parameters mit als Log-Likelihood-Funktion an.

*Antwort:*

4. Die Fisher-Informationen für bei bekannter ist . Wie lautet die Jeffreys-Prior für ?

*Antwort:*

**3.3**

1. Geben Sie angesichts des Datensatzes und unter Verwendung des Linearkerns, die Parzen-Fenster-Schätzung der PDF der Stichprobe unter Verwendung einer Bandbreite an.

*Antwort:*

2. Markieren Sie die richtige Antwort. Führen größere oder kleinere Werte für die Bandbreite h zu glatteren Parzen-Fenster-Dichte-Schätzungen?

* *größer*
* kleiner

3. Richtig oder falsch?

Der Gauß-Kern ist immer die beste Option für die Parzen-Fenster-Methode, unabhängig von den gegebenen Stichprobendaten.

* *Richtig*
* Falsch

4. Geben Sie angesichts des Datensatzes und unter Verwendung des Gauß-Kerns die Parzen-Fenster-Schätzung der PDF der Stichprobe unter Verwendung einer Bandbreite der Größe an.

Antwort:

**3.4**

1. Angesichts des markierten Datensatzes welcher Klasse ordnet der 1-NN-Klassifikator den Punkt zu?

*Antwort: 2*

2. Angesichts des markierten Datensatzes welcher Klasse ordnet der 3-NN-Klassifikator den Punkt zu?

*Antwort: 2*

3. Ermitteln Sie angesichts des markierten Datensatzes den k-nn-Radius für den Punkt mit .

*Antwort:*

4. Angesichts des gelabelten Datensatzes zu verwenden wird der k-nn-Radius für den Punkt mit , schätzen Sie bitte die Dichte des gegebenen Punktes: .

*Antwort:*

**4.1**

1. Ein Test mit den Hypothesen und für eine Grundgesamtheit, deren Verteilung gaußförmig ist, ist durchzuführen mit und einer Stichprobe des Umfangs . Wie groß ist der Ablehnungsbereich, wenn die Varianz der Grundgesamtheit unbekannt ist?

*Antwort:*  wo

2. Eine falsche Nullhypothese wird nicht abgelehnt. Um welche Art von Fehler handelt es sich?

*Fehler 1. Art*

3. Angenommen, wir wollen einen Test mit den Hypothesen und durchführen. Die zugrundeliegende Grundgesamtheit ist gaußförmig mit unbekannter Standardabweichung. Eine Stichprobe mit einem Umfang von 10 ergibt einen Stichprobenmittelwert und eine Varianz von und . Berechnen Sie die mit diesem Test verbundene Teststatistik und bestimmen Sie einen Ablehnungsbereich mit einem Signifikanzniveau von -.

*Antwort:* , , wobei

4. Angenommen, wir wollen einen Test mit den Hypothesen und durchführen. Wir nehmen eine Stichprobe mit dem Umfang von 2000 und erhalten einen Stichprobenanteil von . Bestimmen Sie den Wert der beobachteten Teststatistik und geben Sie den Ablehnungsbereich für an.

*Antwort:* , , wobei

**4.2**

1. Wir würden gerne einen -Anpassungstest mit durchführen. Aus einer Umfrage mit 500 Personen ergeben sich für die drei Kategorien die folgenden Werte . Was sind die Erwartungswerte ?

*Antwort:*

2. Anhand von soll geprüft werden, ob zwischen den beiden kategorialen Variablen X und Y ein Zusammenhang besteht. Die möglichen Klassen von X sind , und die möglichen Klassen von Y sind . Die Teststatistik folgt einer -Verteilung mit Freiheitsgraden. Wie lautet ?

*Antwort*: v=12

3. Richtig oder falsch? Wir können den Kolmogorov-Smirnov-Test verwenden, um festzustellen, ob eine Stichprobe aus einer Gauß-Verteilung genommen wurde, auch wenn wir den Mittelwert und die Varianz der Gauß-Verteilung nicht angeben und stattdessen den Stichprobenmittelwert und die Varianz der gegebenen Stichprobe verwenden.

* Richtig
* *Falsch*

4. Die Teststatistik für den Kolmogorov-Smirnov-Test berechnet den maximalen vertikalen Abstand zwischen den Graphen der CDF der gegebenen Normalverteilung und der *empirischen CDF* der gegebenen Stichprobe.

**4.3**

1. Wir möchten einen Test mit den Hypothesen und unter der Annahme durchführen, dass die Grundgesamtheiten unabhängig sind und einer Gauß-Verteilung mit unbekannten, aber gleichen Varianzen folgen. Wir nehmen zwei Stichproben, eine aus jeder Grundgesamtheit. Die erste Stichprobe hat 12 Datenpunkte sowie Stichprobenmittelwert und -varianz bzw. . Die zweite Stichprobe hat 15 Datenpunkte sowie Stichprobenmittelwert und -varianz und . Berechnen Sie den beobachteten Wert der Teststatistik.

*Antwort:*

2. Beantworten Sie die vorherige Frage unter der Annahme, dass die unbekannten Varianzen nicht gleich sind.

*Antwort:*

3. Geben Sie den Ablehnungsbereich für den Test in Frage 1 bei an

*Antwort:* , wobei

4. Berechnen Sie die Freiheitsgrade für die t-Verteilung aus dem Welch-Test (t-Test für ungleiche Varianzen) mit

Antwort:

**4.4**

1. Was ist die Teststärke eines statistischen Tests?

*Die Teststärke eines statistischen Tests ist die Wahrscheinlichkeit der Ablehnung einer falschen Nullhypothese gegenüber einer bestimmten Alternativhypothese.*

2. Wir neigen dazu, die Nullhypothese abzulehnen, wenn der p-Wert eines statistischen Tests .... ist.

* *klein*
* groß

3. Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall von 90 Prozent für den Mittelwert einer Gauß-Verteilung mit wenn der Stichprobenmittelwert von 20 Beobachtungen beträgt

*Antwort:*

4. Forschende führen einen Test mit den Hypothesen und . Sie geben ein Konfidenzintervall von 99 Prozent an mit . Wie lautet die Entscheidung bezüglich der Nullhypothese auf der Grundlage dieses Konfidenzintervalls? Denken Sie daran, das Signifikanzniveau anzugeben.

*Antwort*: Da das Intervall Null enthält, können wir die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von nicht ablehnen.

**4.5**

1. Wenn zehn Hypothesen gleichzeitig getestet werden, jede mit einem Signifikanzniveau von 1 Prozent, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine wahre Nullhypothese abzulehnen?

*Antwort: 65 %*

2. Welches Maß kontrolliert die Bonferroni-Methode und wie?

*Die Bonferroni-Methode kontrolliert einen familienspezifischen Fehler (Family-wise Error), nämlich die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine wahre Nullhypothese abzulehnen. Die Korrektur des Signifikanzniveaus lautet , wobei m die Anzahl der Nullhypothesen ist und das Signifikanzniveau für jede Hypothese ist.*

3. Was ist ein Nachteil der Bonferroni-Methode?

*Ein Nachteil der Bonferroni-Methode ist, dass die Kontrolle eines familienspezifischen Fehlers zu streng ist und oft zu einer geringen Teststärke führt.*

4. Erläutern Sie die Falsch-Positiv-Rate (oder Falscherkennungsrate).

*FDR ist der erwartete Anteil der abgelehnten wahren Nullhypothesen im Verhältnis zu allen abgelehnten Nullhypothesen.*

**5.1**

1. Geben Sie den Zustandsraum des zu Beginn dieses Abschnitts vorgestellten E-Mail-Klassifizierungsproblems an.

*Antwort:*

2. Richtig oder falsch?

Jede Verlustfunktion muss nicht-negativ sein.

* *Richtig*
* Falsch

3. Die Risikofunktion ist eine (i) *deterministische* Funktion des (ii) *Zustands*.

**5.2**

1. Erklären Sie, wie die Minimax-Entscheidungsfunktion zu ihrem Namen kommt.

*Die Minimax-Entscheidungsfunktion ist die Entscheidungsfunktion, die die besten (minimalen) Entscheidungsfunktionen unter den schlechtesten (maximalen) aller wahren Zuständen liefert.*

2. Richtig oder falsch?

Das Bayes-Risiko beinhaltet zwei Erwartungen, eine in Bezug auf die Verteilung der Daten (Entscheidungsfunktion) und die andere in Bezug auf den Zielparameter (A-priori-Verteilung).

* *Richtig*
* Falsch

**5.3**

1. und seien zwei Entscheidungsfunktionen mit für alle und für einen bestimmten Wert von . Welche der beiden Entscheidungsfunktionen ist in Bezug auf die andere zulässig?

* (*richtig*)

2. Richtig oder falsch?

Der James-Stein-Schätzer (Entscheidungsfunktion) zur Schätzung von mehr als drei Mittelwerten ist zulässig.

* *Richtig*
* Falsch