התפתחות זיהוי ונימוק יחסי הכלה בין מרובעים בעקבות ניתוח אירועים מתמטיים

אחסאן חאג' יחיא, המכללה הערבית בית ברל, מכללת אלקאסמי

הודא שאיב, מכללת אלקאסמי

ג'והיינה עואודה שחברי, מכללת אלקאסמי

מבוא

יחסי הכלה בין צורות גיאומטריות חיוניים לחשיבה גיאומטרית מתקדמת, לפי המודל של ואן הילה. מחקרים מראים קשיים נרחבים בהבנת יחסים היררכיים בין צורות גיאומטריות בכלל ומרובעים בפרט. קשיים אלו נצפו בקרב תלמידים ואפילו בקרב מורים ופרחי הוראה ממדינות שונות (למשל, Pagiling and Nur'aini, 2022). הסיבות לקשיים אלו עשויות להיות קשורות לתכונות לא קריטיות המייחדות את הדוגמאות הפרוטוטיפיות. התכונות הלא קריטיות הללו מאופיינות בגורמים חזותיים חזקים מאוד אשר לעתים קרובות גוברים על ההגדרות הפורמליות בהיגיון של תלמידים (Haj-Yahya and Hershkowitz, 2013). במחקר עדכני נמצא כי גורמים חזותיים המאפיינים את התכונות הלא קריטיות של המושגים הגיאומטריים השפיעו על תלמידי כיתה י"א בבואם לבנות או להעריך הוכחות הקשורות במושגים אלו (Haj-Yahya and Hershkowitz, 2024). עובדה זו מדגישה פער משמעותי בחינוך לגיאומטריה: תלמידים מתקשים בהכללת מקרים ספציפיים לעקרונות גיאומטריים רחבים יותר.

אירועים מתמטיים הם התרחשויות בכיתה הדורשות התערבות מורה. הם יכולים להיות אמיתיים או היפותטיים כדי ליישם מושגים מתמטיים (Markovitz, 2003). הם משמשים בהכשרת מורים ובמחקר (Tirosh et al., 2019) ומשפרים את ההבנה של אופן החשיבה של התלמידים בקרב המורים, ואת תגובותיהם. אירועים אלו יכולים להעמיק את ההבנה של התלמידים במושגי מפתח ויוצרים שיח בעל ערך בקהילה לומדת המבוססת על דיאלוג טיעוני (Toulmin, 2003). הבנת יחסי הכלה ושליטה בקשרים היררכיים אלו חיוניות לחשיבה מסדר גבוה והוכחות גיאומטריות. המחקר הנוכחי בוחן כיצד ניתוח אירועים מתמטיים משפיע על יכולתם של מורים עתידיים לזהות ולהצדיק יחסי הכלה בין מרובעים**.**

מתודולוגיה

במחקר זה השתתפו 20 סטודנטים בקורס הוראת גיאומטריה במכללה להכשרת מורים. הקורס הועבר ע"י אחד החוקרים והתוכן התמקד בארבעה תחומים: תכונות של צורות גיאומטריות, יחסים מרחביים, טרנספורמציות וסימטריה, וויזואליזציה. המחקר נערך בשלושה מפגשים שהתמקדו ביחסי הכלה בין צורות גיאומטריות. תהליך ההוראה והלמידה כלל דיונים במסגרת אירועים מתמטיים. האירועים המתמטיים פותחו בהתבסס על ספרות קיימת ועל הניסיון של החוקרים בהוראת גיאומטריה. מטרת האירועים הייתה לעודד את הסטודנטים לפתח הבנה מעמיקה ביחסי הכלה, תוך יצירת הזדמנויות לחקירת שיטות, הצדקה והשתתפות פעילה בדיונים. מקורות הנתונים התבססו על שאלון מקדים שהועבר בתחילת הקורס ושאלון מסכם שהועבר בתום הקורס. שני השאלונים כוללים משימות מילוליות וחזותיות הקשורות ליחסי הכלה במרובעים. בנוסף, תצפיות בדיונים כיתתיים במהלך ניתוח אירועים מתמטיים הוקלטו בוידאו ותומללו מילה במילה. הנתונים מהשאלונים נותחו באמצעות ניתוח תוכן תמטי (Braun and Clarke, 2006), והחוקרים מיינו את הנתונים לפי קטגוריות שדווחו ע"י חאג'-יחיא והרשקוביץ (Haj-Yahya and Hershkowitz, 2013) וכן קטגוריות נוספות שעלו במהלך הניתוח. ניתוח התצפיות התבסס על מודל טולמין (Toulmin, 2003), שבו נבנה יומן הנמקה מהדיונים הכיתתיים. בכל פעם שהמשתתפים הגיעו למסקנות משמעותיות, הנתונים נאספו ונותחו בהתאמה למרכיבי מודל ההנמקה: נתונים, טענה, נימוק, תמיכה, סתירה ומזג.

ממצאים

הממצאים מראים כי המשתתפים העמיקו את הבנתם בזיהוי והצדקה של יחסי הכלה במרובעים במהלך התמודדותם עם ניתוח האירועים המתמטיים. עדות לכך ניכרת הן במספר הטיעונים הנכונים והן במספר הטיעונים השגויים שהועלו. בהתייחס לטיעונים השגויים, ניתן להבחין במגמת ירידה במספרם לאורך שלושת האירועים המתמטיים, מה שמרמז על הבנה מעמיקה וברורה יותר של יחסים אלה. בשל מגבלות מקום, נבחרה להצגה אפיזודה אחת בלבד (אפיזודה 1) המתארת את התפתחות הדיון על יחסי ההכלה בין ריבוע ודלתון, תוך דגש על מאפיין משותף - האלכסון הראשי מאונך לאלכסון המשני.

אפיזודה 1: האלכסונים מאונכים זה לזה (התכונות המשותפות בין דלתון לריבוע)

1 רימה: אני בטוחה שצורה 1 () היא דלתון וגם צורה 2 () היא דלתון. אבל, אני מתלבטת לגבי הריבוע (), כי המראה שלו שונה.

2 מרצה: מה דעתכם שנבחן אילו תכונות של הדלתון קיימות בצורות אלו, ונבדוק אם הן קיימות גם בריבוע? במיוחד מבחינת האלכסונים. מה דעתכם, מי רוצה להציג על הלוח, לנסות לבחון את האלכסונים?

3 סיהאם: אני רוצה לצייר על הלוח ולרשום קו ישר בין כל הקודקודים הנגדיים - אלה הם האלכסונים... אני אעשה את זה כך, לא משנה אפילו אם זה מחוץ לצורה, אני רוצה להציג לכן את זה [סיהאם פונה ללוח ומציירת את האלכסונים]. 

4 מרצה: תודה, סיהאם. מה התוצאה שקיבלת מהאלכסונים שציירת?

5 סיהאם: המממ....

6 מאס: האלכסונים מאונכים זה לזה.

7 מרצה: יפה, האלכסונים מאונכים. בואו נבדוק את התכונה הזו על הדף שלכן. כל אחד יצייר את האלכסונים בשלוש הצורות ויבדוק אם נוצרו זוויות ישרות.

8 הסטודנטים מציירים את האלכסונים ובודקים. כן. כולם מאונכים.

9 מרצה: אם כן, מהי התכונה הראשונה של הדלתון שגיליתם?

10 הסטודנטים: האלכסונים מאונכים בשלושתם.

11 מרצה: מה זה אומר שהאלכסונים מאונכים?

12 רימה: הם יוצרים זווית של $90^{o}$.

מהאפיזודה לעיל, החוקרים בחרו להציג טיעון אחד אשר מראה את השינוי המוצג בתרשים 1**.**

תרשים 1

טיעון 1: שני האלכסונים מאונכים זה לזה (תכונה משותפת לריבוע ודלתון)



הטיעון לעיל מתייחס לתכונה גיאומטרית משותפת בין ריבוע לדלתון. הטיעון כלל טענה (Claim) שנאמרה על ידי מאס [6]: "האלכסונים מאונכים זה לזה", ומבוססת על נתונים חזותיים שסופקו על ידי סיהאם [3], אשר ציירה על הלוח את האלכסונים של הצורות השונות והראתה את זוויות המפגש ביניהם כזוויות ישרות. הנתונים הללו מדגימים באופן חזותי את הטענה. ההצדקה (Warrant) לטענה ניתנה גם על ידי אותה סטודנטית, סיהאם [3], באמצעות ההסבר המילולי שסיפקה: "אני רוצה לצייר על הלוח ולרשום קו ישר בין כל הקודקודים הנגדיים - אלה הם האלכסונים...". הסבר זה מחבר בין הנתונים שהוצגו לבין הטענה, בכך שהוא מתאר את הפעולה הגיאומטרית הנדרשת לבדיקת אנכיות האלכסונים. בכך, הטיעון משתמש בשילוב של נתונים חזותיים והסברים מילוליים כדי לבסס את התכונה המתמטית הנדונה ולהוכיח את נכונותה. במילים אחרות, ניתן לסכם כי תרשים 1 מתאר תהליך שבו המשתתפים מזהים את המאפיין הקריטי של אנכיות האלכסונים במעוינים פרוטוטיפים ולא-פרוטוטיפים. דרך הצגת הנתונים, בחינתם והסקת המסקנה כי אנכיות היא תכונה משותפת לריבוע ולדלתון, הם מסיקים כי מדובר בתכונה חשובה המשותפת לכל הצורות.

השינוי שחל בקרב המשתתפים ביכולתם לזהות יחסי הכלה במרובעים התבטא גם בממצאי המבחן המסכם. התוצאות מראות שיפורים בזיהוי והצדקה של מערכות יחסים במרובעים, מעבר מהבנות צרות ואבטיפוסיות להמשגות רחבות יותר. יש מעבר ברור מזיהוי שגוי לזיהוי נכון של קשרי צורות, שניכר גם בתגובות וגם בנימוקים. בתחילה, המשתתפים ביססו שיפוט על תכונות לא קריטיות של דוגמאות פרוטוטיפיות. לאחר ההתערבות, המשתתפים החלו להצדיק תגובות על סמך הגדרות פורמליות, להסביר כיצד קבוצה אחת נכללת בתוך אחרת, או להפגין הבנה שתכונות של צורה אחת מוכלות בתוך תכונות של צורה אחרת. המשתתפים זיהו גם קשרי הכלה שלא נלמדו ישירות, כגון ריבועים כמקביליות. התלמידים הבינו שבעוד שכל ריבוע הוא מלבן, ההפך אינו נכון (ראה טבלה 1). גם הממצאים הקשורים למשימות החזותיות (ראה טבלה 2) הראו שיפור משמעותי בזיהוי דוגמאות לא פרוטוטיפיות בשאלון המסכם, כגון ריבועים כמלבנים, דלתונים, מלבנים כמקביליות.

טבלה 1

תשובות המשתתפים עבור המטלה המילולית

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| טענה  | שאלון לפני | שאלון אחרי |
|  | קיבלו את הטענה | דוגמאות לנימוקים | קיבלו את הטענה | דוגמאות לנימוקים |
| הריבוע הוא מלבן | 22.3% | המלבן שונה מריבוע כי זוג אחד של צלעות ארוך יותר מהזוג השני | 83.3% | תכונות המלבן הן חלק מתכונות הריבוע |
| המלבן הוא מקבילית | 55.5% | במלבן כל הזוויות ישרות, אבל במקבילית לא | 83.3% | כי למלבן יש את כל תכונות המקבילית |
| הריבוע הוא דלתון | 11.1% | בדלתון לא מתקיים שכל הצלעות שוות באורכן | 72.2% | הריבוע הוא דלתון אשר כל צלעותיו שווים. |

טבלה 2

תשובות המשתתפים למשימות החזותיות

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| הצורה | מועד המבחן | זוהתה כריבוע | זוהתה כמלבן | זוהתה כמקבילית | זוהתה כדלתון |
|  | לפני | 100% | 33.3% | 16.6% | 0% |
| אחרי | 100% | 100% | 88.8% | 94.4% |
|  | לפני | 44.4% | 11.1% | 0% | 5% |
| אחרי | 100% | 100% | 77% | 88.8% |
|  | לפני | 11.1% | 49.4% | 33.3% | - |
| אחרי | - | 100% | 94.4% | - |
|  | לפני | 11.1% | 100% | 16.6% | - |
| אחרי | - | 100% | 88.8% | - |

דיון

הממצאים הצביעו על כך שהדיון באירועים מתמטיים סייע לחשוף את נטיית המשתתפים להסתמך על תכונות לא קריטיות כשהתבקשו לזהות את יחסי ההכלה בין המרובעים השונים- תכונות לא קריטיות שמאפיינות בעיקר דוגמאות פרוטוטיפיות. בנוסף, הצורך להסביר ולתמוך בטענותיהם הוביל אותם להשתמש בהגדרות פורמליות או בתכונות קריטיות, מה שסייע להם לזהות שצורות מסוימות חולקות תכונות ומשתייכות לקטגוריות רחבות יותר (הקבוצה המכילה). לדוגמה, באפיזודה שהיצגנו, הדיון התקדם מאי-ודאות חזותית ראשונית להשוואה שיטתית של מאפייני דלתון וריבוע, מה שהוביל את המשתתפים לזהות תכונות קריטיות משותפות, ובסופו של דבר להגיע למסקנה כי לריבוע יש את התכונות של דלתון. התוצאות שעלו במחקר הנוכחי תואמות למחקרים קודמים (למשל, Stockero et al., 2019) המדגישים את האפקטיביות של עיסוק בניתוח אירועים מתמטיים. היישום של מודל טולמין מדגיש כיצד הידע של המשתתפים התפתח לאחר ההתערבות, כשהם הראו הבנה משופרת של יחסי הכלה ופיתחו דימוי מושג רחב יותר, שאינו מוגבל לדוגמאות פרוטוטיפיות. שיפור נצפה אצל רוב המשתתפים גם ביחסי הכלה שלא טופלו ישירות באירועים. אנו מדגישים את יעילות השימוש בניתוח אירועים מתמטיים וגם בשימוש במודל טולמן שמספק תובנה על תהליך התפתחות ההנמקה הלוגית בקרב הלומדים.

ביבליוגרפיה

Braun, V. and Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>

Haj Yahya, A. and Hershkowitz, R. (2024). Interference of prototypical geometry representations in students’ construction of concepts and development of proofs. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–22. <https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2386619>

Haj-Yahya, A. and Hershkowitz, R. (2013). When visual and verbal representations meet the case of geometrical figures. In Lindmeier, A. M. and Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 409-416. Kiel, Germany: PME.

Markovich, C. (2003). Analysis of mathematical events in the classroom. Tel-Aviv: Moffet Institute.

Pagiling, S. L. and Nur'aini, K. D. (2022). Specialized content knowledge lower secondary school teachers on quadrilaterals. *Pythagoras, 17*(1).

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E. S. and Barkai, R. (2019). Using theories and research to analyze a case: Learning about example use. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(2), 205–225. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9386-y>

Toulmin, S. (2003). The Uses of Argument (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005>