מציאת הערך המקסימלי או המינימלי של פונקציה

ריבועית בשני משתנים בגישה אלגברית

עלי עותמאן ALI OTHMAN - מכללה אקדמית אלקאסמי

במאמר זה אציג דרך פשוטה למציאת נקודות הקיצון (האקסטרימום) של פונקציה ריבועית בשני משתנים. דרך זו הנה הכללה של דרך מציאת נקודות הקיצון של פונקציה ריבועית במשתנה אחד. הדרך למציאת נקודות קיצון של פונקציה ריבועית במשתנה אחד מסתמכת אך ורק על רעיון ההשלמה לריבוע, כלומר, היא דרך אלגברית טהורה, אשר אפשר ללמד אותה לתלמידים מתקדמים. במהלך הפתרון המוצג כאן נגיע לנגזרות החלקיות של דטרמיננט הסיאן, נטפל במקרה שבו דטרמיננט הסיאן שווה אפס, ונגיע לתנאי הכרחי ומספיק לקביעה אם נקודה חשודה היא נקודת קיצון או לא במקרה זה.

1. חקירת פונקציה ריבועית במשתנה אחד

מציאת הערך המקסימלי או המינימלי של פונקציה ריבועית במשתנה אחד

תהי $f(x)=ax^2+bx+c$ כאשר $a\neq 0$. על-ידי שימוש בהשלמה לריבוע, נציג את הפונקציה בצורה השקולה הבאה:

$$f(x)=\frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4bax+4ac\right)=\frac{1}{4a}\left((2ax)^2+2b(2ax)+4ac\right)=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-b^2+4ac\right]$$
$$=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-(b^2-4ac)\right]$$

נסמן $\Delta=b^2-4ac$ (Δ היא הדיסקרימיננטה).

לכן $f(x)=\frac{1}{4a}(2ax+b)^2-\frac{\Delta}{4a}$.

במקרה בו $a>0$ אז $f(x)$ מקבלת ערך מינימלי כאשר $2ax+b=0$, כלומר, כאשר $x=-\frac{b}{2a}$, והערך המינימלי הוא $-\frac{\Delta}{4a}$. הנקודה $\left(-\frac{b}{2a}\,,\,-\frac{\Delta}{4a}\right)$ היא קדקוד הפונקציה הריבועית והיא נקודת תחתית.

במקרה בו $a<0$ אז הפונקציה $f(x)$ מקבלת ערך מקסימלי כאשר $2ax+b=0$. כלומר, $x=-\frac{b}{2a}$ היא נקודת המקסימום, והערך המקסימלי הוא $-\frac{\Delta}{4a}$. הנקודה $\left(-\frac{b}{2a}\,,\,-\frac{\Delta}{4a}\right)$ היא נקודת ראש.

בשני המקרים, הנקודה $\left(-\frac{b}{2a}\,,\,-\frac{\Delta}{4a}\right)$ נקראת קדקוד הפונקציה הריבועית.

מטריצת הסיאן (Hessian)
היא מטריצה ריבועית שאיבריה הם הנגזרות
החלקיות מסדר שני של פונקציה

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-\Delta\right]$$

שימו לב כי: $f'(x)=2ax+b$ (הנגזרת של הפונקציה).

נכליל עכשיו את רעיון ההשלמה לריבוע לחקירת הפונקציה הריבועית בשני משתנים.

2. פונקציה ריבועית בשני משתנים

תהי $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+k$.

2.1 המקרה המרכזי כאשר $a\neq 0$ ו- $b\neq 0$ (או $c\neq 0$ וגם $b\neq 0$)

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{4a}(4a^2x^2+4abxy+4acy^2)+dx+ey+k\\&=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by)^2-b^2y^2+4acy^2\right]+dx+ey+k\\&=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by)^2+4adx+4aey-\Delta y^2\right]+k\end{aligned}$$

נבחין בין שלושה מקרים:

2.1.1 מקרה I: $\Delta\neq 0$

כאשר $\Delta=b^2-4ac$

נציג את הפונקציה בצורה אחרת על-ידי שימוש בהשלמה לריבוע:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by)^2+2d(2ax+by)+(4ae-2bd)y-\Delta y^2\right]+k\\&=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by+d)^2-d^2+(4ae-2bd)y-\Delta y^2\right]+k\\&=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by+d)^2-\Delta\left(y^2-2\left(\frac{2ae-bd}{\Delta}\right)y+\frac{d^2}{\Delta}\right)\right]+k\\&=\frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2-\frac{\Delta}{4a}\left[(y-\frac{2ae-bd}{\Delta})^2-(\frac{2ae-bd}{\Delta})^2+\frac{d^2}{\Delta}\right]+k\end{aligned}$$

נסמן : $y_0 = \dfrac{2ae-bd}{\Delta}$

לכן: $$f(x,y) = \frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2 - \frac{\Delta}{4a}(y-y_0)^2 + \frac{\Delta \cdot {y_0}^2}{4a} - \frac{d^2}{4a} + k$$

אם נבצע אותו תהליך לגבי המשתנה y (החלפת y ב- x ולהיפך, החלפת a ב- c ולהיפך, והחלפת d ב- e ולהיפך, בתנאי ש- $c \neq 0$), נקבל:

$$f(x,y) = \frac{1}{4c}(2cy+bx+e)^2 - \frac{\Delta}{4c}(x-x_0)^2 + \frac{\Delta \cdot {x_0}^2}{4c} - \frac{e^2}{4c} + k \tag{1}$$

כאשר: $x_0 = \dfrac{2cd-be}{\Delta}$, ($\Delta = b^2 - 4ac$).

ניתן להציג את y_0 , x_0 בעזרת דטרמיננטים:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -d & b \\ -e & 2c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix}} \quad \text{ו -} \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2a & -d \\ b & -e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix}}$$

רואים כי $(x_0 \,,\, y_0)$ הוא הפיתרון היחיד של המערכת:

$$\begin{cases} 2ax + by + d = 0 \\ bx + 2cy + e = 0 \end{cases}$$

(לפי נוסחת קרמר לפתרון מערכת משוואות באמצעות דטרמיננטים)

מהמשוואה (1) נקבל כי:

$$f(x_0,y_0) = \frac{(2ae-bd)^2}{4a\Delta} - \frac{d^2}{4a} + k$$

וגם $f(x_0,y_0) = \dfrac{(2cd-be)^2}{4c\Delta} - \dfrac{e^2}{4c} + k$ (קל לבדוק את קיום השוויון), לכן:

$$\boxed{\begin{array}{l} a \neq 0, \\ f(x,y) = \dfrac{1}{4a}(2ax+by+d)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}(y-y_0)^2 + f(x_0,y_0) \end{array}}$$

צורה אחרת:

$$\boxed{\begin{array}{l} c \neq 0, \\ f(x,y) = \dfrac{1}{4c}(2cy+bx+e)^2 - \dfrac{\Delta}{4c}(x-x_0)^2 + f(x_0,y_0) \end{array}}$$

כאשר $(x_0\ ,\ y_0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת:

$$\begin{cases} 2ax+by+d=0 \\ 2cy+bx+e=0 \end{cases}$$

ניתן גם לקבל את ההצגה הבאה כאשר $ac\neq 0$:

$$f(x,y)=\frac{1}{8a}\left[(2ax+by+d)^2-\Delta(y-y_0)^2\right]+\frac{1}{8c}\left[(2cy+bx+e)^2-\Delta(x-x_0)^2\right]+f(x_0,y_0)$$

עכשיו קל לקבוע מקסימום או מינימום במקרה זה:

I א) אם $\Delta<0$ ו- $a>0$ (אז גם $c>0$) אז ברור כי $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ לכל (x,y).

לכן $(x_0\ ,\ y_0)$ היא נקודת המינימום הגלובלי של הפונקציה.

אם $\Delta<0$ ו- $a<0$ (אז גם $c<0$) אז $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ לכל (x,y).

לכן $(x_0\ ,\ y_0)$ היא נקודת המקסימום הגלובלי של הפונקציה.

I ב) במקרה $\Delta>0$ ו- $a>0$ נתבונן בהצגה:

$$f(x,y)=\frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2-\frac{\Delta}{4a}(y-y_0)^2+f(x_0,y_0)$$

אם (x,y) נמצאת על הישר $2ax+by+d=0$ אז $f(x,y)=-\frac{\Delta}{4a}(y-y_0)^2+f(x_0,y_0)$ ושואף ל- $-\infty$ כאשר $|y|$ שואף ל- ∞. כמו כן, לכל x מתקיים: $f(x,y_0)=\frac{1}{4a}(2ax+by_0+d)^2+f(x_0,y_0)$ ושואף ל- ∞ כאשר $|x|$ שואף ל- ∞. לכן $(x_0\ ,\ y_0)$ אינה נקודת מקסימום ואינה נקודת מינימום של הפונקציה.

המצב דומה עבור $\Delta>0$ ו- $a<0$.

2.1.2 מקרה II: $\Delta=0$. במקרה זה:

$$f(x,y)=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by)^2+4adx+4aey\right]+k=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by)^2+2d(2ax+by)-2bdy+4aey\right]+k$$
$$=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by+d)^2-d^2+2(2ae-bd)y\right]+k$$
$$=\frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2+\frac{1}{2a}(2ae-bd)y+k-\frac{d^2}{4a}$$

אם $a\neq 0$ ו- $\Delta=0$ אז:

$$f(x,y)=\frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2+\frac{1}{2a}(2ae-bd)y+k-\frac{d^2}{4a}$$

נבחין בין שני מקרים:

II א) אם $2ae-bd=0$, אז:

$$f(x,y)=\frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2+k-\frac{d^2}{4a}$$

אם $a>0$ אז הפונקציה מקבלת את הערך המינימלי שלה בכל הנקודות הנמצאות על הישר $2ax+by+d=0$, והערך המינימלי הוא $k-\frac{d^2}{4a}$.

ואם $a<0$ אז הפונקציה מקבלת את הערך המקסימלי שלה בכל הנקודות הנמצאות על הישר $2ax+by+d=0$, והערך המקסימלי הוא $k-\frac{d^2}{4a}$.

II ב) במקרה $\Delta=0$ ו- $2ae-bd\neq 0$ אז הפונקציה היא:

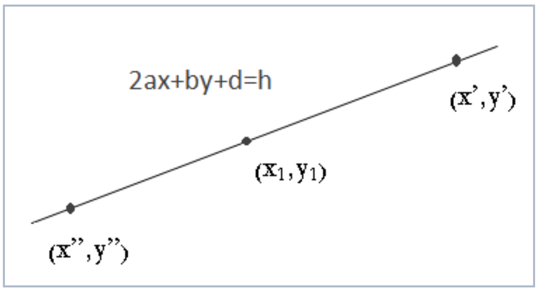
$$f(x,y)=\frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2+\frac{1}{2a}(2ae-bd)y+k-\frac{d^2}{4a}$$

אין לפונקציה מקסימום או מינימום מוחלט, כי לאורך הישר $2ax+by+d=h$ לכל נקודה (x_1,y_1) אם $2ax_1+by_1+d=h$, אז:

$$f(x_1,y_1)=\frac{1}{4a}h^2+\frac{1}{2a}(2ae-bd)y_1+k-\frac{d^2}{4a}$$

לכן אם (x',y') ו- (x'',y'') על הישר $2ax+by+d=h$ משני צדי הנקודה $(x_1\ ,y_1)$,

אז בוודאי אחד מבין $f(x',y')$ או $f(x'',y'')$ גדול מ- $f(x_1\ ,y_1)$ והשני קטן ממנו .



איור 1

לכן (x_1,y_1) אינה נקודת מקסימום או מינימום מקומי של הפונקציה .

הערה: נעיר כי שני הביטויים $2ax+by+d$ ו- $bx+2cy+e$ הם הנגזרות החלקיות של הפונקציה: $f(x,y)$

כלומר :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2ax+by+d$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=bx+2cy+e$$

הדטרמיננט הבא: $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ נקרא **הסיאן,** ובמקרה הזה הוא שווה בנקודה $(x_0\ ,\ y_0)$

ל: $\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac-b^2 = -\Delta$

במתמטיקה מתקדמת ידועה חשיבות הנגזרות החלקיות במציאת נקודות המקסימום או המינימום המקומי. הגענו לשימוש בנגזרות החלקיות דרך ההשלמה לריבוע.

דוגמה 1: נתונה הפונקציה:

$$f(x,y)=4x^2+7xy+5y^2-4x+12y$$

בדקו אם קיים לפונקציה מקסימום או מינימום מוחלט, מצאו אותו במקרה שהוא קיים, ומצאו באיזו נקודה הוא מתקיים:

א) לפי הכלל שמצאנו במאמר.

ב) באופן ישיר (בשביל להבין את דרך מציאת הכלל).

הפתרון:

א) פתרון לפי הכלל: $\Delta=7^2-4\cdot 4\cdot 5=-31<0$ ו- $a=4>0$. לכן לפונקציה קיים מינימום מוחלט. כדי למצוא את נקודת המינימום המוחלט נפתור את המערכת:

$$\begin{cases} 8x+7y-4=0 \\ 7x+10y+12=0 \end{cases}$$

הפתרון הוא $(x_0\ ,y_0)=(4,-4)$, ולכן $f_{\min}=f(4,-4)=-32$.

ב) פתרון ישיר (בשביל הבנת התהליך):

$$f(x,y)=\frac{1}{4}(16x^2+28xy+20y^2)-4x+12y$$
$$=\frac{1}{4}\left[(4x+\frac{7}{2}y)^2-(\frac{7}{2}y)^2+20y^2\right]-4x+12y$$
$$=\frac{1}{4}\left[(4x+\frac{7}{2}y)^2+\frac{31}{4}y^2\right]-4x+12y$$
$$=\frac{1}{4}\left[(4x+\frac{7}{2}y)^2-16x+48y\right]+\frac{31}{16}y^2$$
$$=\frac{1}{4}\left[(4x+\frac{7}{2}y)^2-4(4x+\frac{7}{2}y)+62y\right]+\frac{31}{16}y^2$$
$$=\frac{1}{4}\left[(4x+\frac{7}{2}y)^2-4(4x+\frac{7}{2}y)\right]+\frac{31}{16}y^2+\frac{31}{2}y$$

$$=\frac{1}{4}\left[(4x+\frac{7}{2}y-2)^2-4\right]+\frac{31}{16}(y^2+8y)$$
$$=\frac{1}{4}(4x+\frac{7}{2}y-2)^2+\frac{31}{16}(y+4)^2-31-1$$
$$=\frac{1}{16}(8x+7y-4)^2+\frac{31}{16}(y+4)^2-32$$

רואים בבירור כי לפונקציה יש מינימום מוחלט כאשר שני הריבועים שווים 0 . זה מתקיים כאשר $y_0=-4$ ו- $x_0=4$. הערך המינימלי שווה 32-.

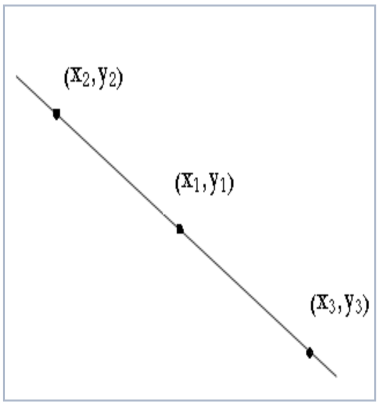
דוגמה 2: חקרו את הפונקציה הבאה:

$$f(x,y)=x^2+6xy+9y^2-8x-12y$$

א) לפי הכלל: $\Delta=6^2-4\cdot1\cdot0=0$

$$2ae-bd=2\cdot1\cdot(-12)-6\cdot(-8)=24\neq0$$

אין לפונקציה מקסימום או מינימום מוחלטים או מקומיים.



איור 2

ב) פתרון ישיר:

$$f(x,y)=(x+3y)^2-8(x+3y)+12y=(x+3y-4)^2+12y-16$$
$$f(4-3y,y)=0^2+12y-16$$

כאשר y שואף ל- ∞ אז ערכי הפונקציה ישאפו ל- ∞.

כאשר y שואף ל- $-\infty$ אז ערכי הפונקציה ישאפו ל- $-\infty$.

לכן אין לפונקציה מקסימום או מינימום מוחלט. נראה עכשיו שאין לפונקציה נקודות מקסימום או מינימום מקומיים.

אם (x_1,y_1) נקודה כלשהי, ואם $x_1+3y_1-4=h$, תהיינה (x_2,y_2) ו- (x_3,y_3) שתי נקודות בסביבת הנקודה (x_1,y_1), משני צדי הנקודה (x_1,y_1).

לכן $f(x_2,y_2)=12y_2-16$ ו- $f(x_3,y_3)=12y_3-16$.

אם $y_2>y_1>y_3$ אז $f(x_2,y_2)>f(x_1,y_1)>f(x_3,y_3)$. לכן (x_1,y_1) אינה נקודת מינימום מקומי.

2.2 סקירה של המקרים האחרים:

2.2.1: כאשר $b=0$

2.2.1.1: כאשר $b=0$ וגם $a>0$ וגם $c>0$.

אז:

$$f(x,y)=ax^2+cy^2+dx+ey+k=a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+c\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2+\frac{4kac-cd^2-ae^2}{4ac}$$

אז הנקודה $\left(-\frac{d}{2a},-\frac{e}{2c}\right)$ היא נקודת מינימום גלובלי של הפונקציה, והערך המינימלי הוא $\frac{4kac-cd^2-ae^2}{4ac}$.

כאשר $b=0$ וגם $a<0$ וגם $c<0$, אז $f(x,y)=a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+c\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2+\frac{4kac-cd^2-ae^2}{4ac}$.

ברור כי הנקודה $\left(-\frac{d}{2a},-\frac{e}{2c}\right)$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה, והערך המקסימלי הוא $\frac{4kac-cd^2-ae^2}{4ac}$.

2.2.1.3: כאשר $b=0$ וגם $ac<0$. במקרה זה ערכי הפונקציה ישאפו ל- ∞ וגם ל- $-\infty$. לכן הפונקציה לא מקבלת מקסימום ולא מקבלת מינימום.

2.2.2: כאשר $b\neq 0$ וגם $a=0$ וגם $c=0$:

במקרה זה קל לראות כי ערכי הפונקציה ישאפו ל- ∞ וגם ל- $-\infty$. לכן הפונקציה לא מקבלת מקסימום ולא מקבלת מינימום.

לקריאה עבור מקסימום ומינימום של פונקציה בשני משתנים ראה למשל:

https://www.math.ubc.ca/~feldman/m105/maxmin.pdf

המחבר: ד"ר עלי עותמאן, מרצה למתמטיקה במכללה אקדמית אלקאסמי ., באקה אלגרבייה , ישראל