עיון ודיון

תופעה או חוויה: המקרה של משיק לפולינום ממעלה שלישית

ענב אייזיקוביץ-עודי אסתר גרונהט

מבוא

תלמידים רבים עוסקים בפעילויות מתמטיות מגוונות במשך שנים רבות, בלי שיבינו את ייחודה של המתמטיקה, ודבר זה משפיע לעתים על 'תפקודם המתמטי', המתבטא בתפיסות שונות, הבנה לקויה, בלבול ורתיעה. מקצוע המתמטיקה נתפש בעיני תלמידים רבים כתחום ידע המציב דרישות נוקשות ותרגול רב נטול חוויה. במהלך ההוראה עלינו, המורים, להתייחס למשמעות האיזון קוגניטיבי-רגשי. איזון זה מתייחס לא רק לדרך שבה הקוגניציה יכולה לשלוט על הרגש, או על הדרך שבה הרגש יכול לשלוט על הקוגניציה, אלא לאופן שבו האינטראקציות והמשובים ההדדיים ביניהם תורמים להתמודדות יעילה מול האתגרים שכרוכים בפתרון תרגילים.

שינוי קטן בניסוח בעיה מתמטית, יכול להפוך שאלה לבלתי שגרתית, המובילה לפעילות מסקרנת, חווייתית ומהנה. במאמר זה יוצג מהלך הוראה המשלב מרכיבים של חקר וגילוי, בנייה והדמיה דינמית. במאמר יתואר כיצד ניתן להגיע באופן עצמאי לפיתוח הידע המתמטי ומציאת קשרים בין התופעות. נדון בתרומתם של תרגילים שונים להשגת מטרות בהוראה, כגון: לעורר סקרנות, פיתוח מיומנויות שונות של חקירה, הכללה, ובעיקר חשיפת היופי של המתמטיקה. המאמר הנוכחי מדגים בעיה שמאפייניה מאפשרים לקשר ולשלב בין חקר בסביבה דינמית לבין חוויה מתמטית. הבעיה המקורית מתאפיינת בשימוש בכיווני הוכחה שונים, ובחקירת ההשלכות של השינוי שחל בבעיה ובפתרונה.

ההבנה שתיאור חווית הלמידה הוא סיפור, ושניתן לספר אותו אחרת, מהווה בסיס למאמר זה.

פיתוחים ויישומים של כלים מגוונים בתהליכי למידה והוראה, של נושאים מתוך ומחוץ לתוכנית הלימודים מבורכים, אך אינם מספיקים לשינוי אופי הלמידה. העברת הדגש מהשאלה 'כיצד?' לשאלה 'למה?' מזמנת תהליכי חקר בשלב הניסוי, הגילוי, ההשערה, ההכללה וההנמקה. פתרון בעיות חייב להישאר הגרעין של למידת המקצוע, אך בעיות אלו אמורות להתנסח כבעיות של ניתוח מצבים, שיקולים של דרכי פתרון, ובחירת הפתרון האופטימאלי. חשוב לציין כי לטכנולוגיה פוטנציאל רב להיות אמצעי יעיל ומגוון המהווה מנוף ביצירת חוויה בלמידה, המובילה ללמידה טובה, ואף נעשה בה שימוש בהמשך, אבל זהו לא תנאי הכרחי, ואף נראה דוגמה לכך. נפתח בדוגמה מרהיבה[1] שהצליחה להפתיע אותנו ומורים וותיקים. בהמשך נביא דוגמאות נוספות באותה הרוח. המאפיין את הדוגמאות הוא לא התוכן שלהן, אלא אופי ההצגה שלהן. במקום להציג כל אחד מהתרגילים כתרגיל טכני, אחד מתוך רשימה ארוכה, ניתן לפתח כל אחת מהדוגמאות כפעילות חקר באופן עצמאי, בצוות מורים, או עם כיתה.

פולינומים ממעלה שלישית

תופעה

מה יכול להפתיע אותנו בנוגע לפולינום ממעלה שלישית? את הפונקציות האלו אנחנו כבר פוגשים בכיתה במסגרת שיעורי אנליזה. חוץ מחישוב נקודות חיתוך עם הצירים

(בכל זאת נוסחאות מסובכות) התרגילים הם קלאסיים – למצוא משוואות משיקים, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה.

הבעיה הבאה מבוססת על Texas Instruments (2009).

קודם כל, לצורך חיזוק אלמנט ההפתעה, אנו ממליצות בחום על תרגיל לחימום:

סרטטו **ביד** על **נייר** סקיצה של פונקציה ממעלה שלישית, שיש לה שתי נקודות קיצון.

העבירו ישר אופקי, לצורך הפשטות אפשר שזה יהיה ציר ה- x, שחותך את הפונקציה בשלוש נקודות.

סמנו על הגרף את נקודת האמצע שבין שתי נקודות החיתוך השמאליות [כלומר, אם ערכי ה- x הם a, b יש לסמן על הגרף את הנקודה $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$.

עכשיו העבירו משיק לפונקציה בנקודה הזו.

נחזור עכשיו על אותו התהליך בעזרת גאוגברה או דסמוס. מומלץ מאוד לנסות לבד, כמו כן מצורף קישור ליישומון. ובו רואים סרגל גלילה עם שלבי הבנייה.

בשלב הראשון נבחרות שלוש נקודות על ציר ה- x: $A=(a,0), B=(b,0), C=(c,0)$

בשלב השני מעבירים את הפונקציה f שתעבור דרך שלושת הנקודות: $f(x)=m(x-a)(x-b)(x-c)$ (המקדם m לפני הסוגריים הוא שם רק בשביל שהגרף יראה 'יפה' יותר, כלומר פחות תלול).

בשלב השלישי מגדירים את הנקודה

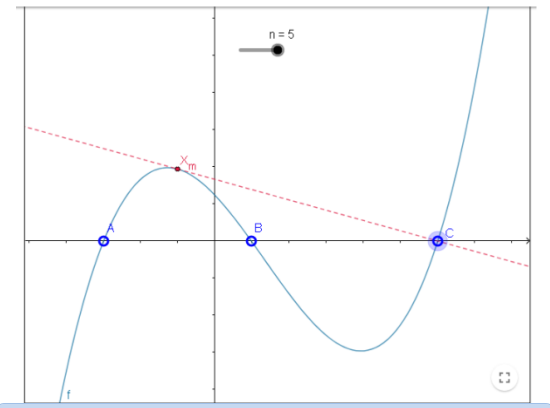
$$M=\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

בשלב הרביעי נעביר דרכה משיק לפרבולה. [בגאוגברה יש כלי לסרטוט משיקים, לחילופין, וכן בדסמוס. נקליד:

$[\ y(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$.

אז סרטטנו משיק, אבל רגע – איפה המשיק הזה פוגש שוב את הפונקציה?

ומי שעוד לא פתח אף יישומון – זה הרגע לעשות זאת! אל דאגה, מצורפים סרטוטים בהמשך, אבל מומלץ בחום לנסות בסביבה דינמית. מצורף שוב הקישור ליישומון המוכן.

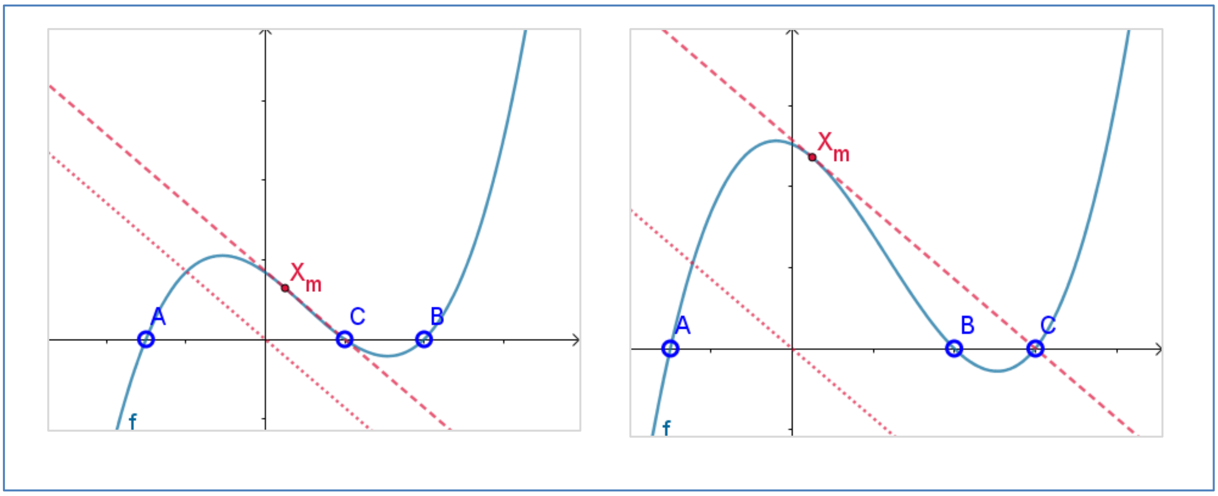


יישומון דינמי : היכן פוגש המשיק את הגרף

מה קורה כאן?

הרבה שאלות מתרוצצות עכשיו בראש:

- האם זה תמיד קורה?
- האם זה הכרחי ש- $a<b<c$?
- האם זה קריטי שהנקודות a, b, c כולן שונות?
- מה כל כך מיוחד בנקודת האמצע?
- למה בסקיצה זה לא יצא כך. (לפחות אצלנו בסקיצה ראשונית יצאו תוצאות פחות מרשימות.)
- האם אפשר להכליל את התופעה לפולינומים ממעלות גבוהות יותר?



איור 1: התופעה המתגלה ביישומון במצבים הדדיים שונים בין הנקודות
א1: $a < b < c$ ב1: $a < c < b$

בעזרת היישומון אפשר לקבל תחושה חזקה מאוד לגבי שלושת התהיות הראשונות. כן, זה תמיד קורה, הסדר בין הנקודות לא הכרחי, והנקודות אפילו יכולות להתלכד!

חשוב לומר – יש כאן ספוילרים, אם אתם רוצים למצוא הוכחה לבד, הניחו לכמה דקות את המאמר, וחיזרו שוב לדף ועט, נסחו בשקט טענה, ואחרי שיש לכם הוכחה (או כיוון להוכחה) המשיכו לקרוא.

נתחיל עם שני סרטוטים (איור 1), בסרטוט א1 מתקיים $a < b < c$. בנוסף לנקודת האמצע ולמשיק, מסורטט גם ישר העובר דרך ראשית הצירים, עם אותו השיפוע כמו של המשיק.

בסרטוט ב1 מתקיים $a < c < b$, ושוב מצורף לסרטוט הישר העובר דרך ראשית הצירים, המקביל למשיק המדובר. שימו לב, בשני הסרטוטים אותם הערכים של a, b ורק הנקודה c השתנתה. האם אתם רואים קשר בין השיפועים של המשיקים בשני הסרטוטים?

ועכשיו קדימה לניסוח התופעה הנצפית.

מה בעצם ראינו? – ניסוח מתמטי של התופעה

טענה 1

נסתכל על הפונקציה:

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x_m := \frac{a+b}{2}$

א. שיפועו תלוי אך ורק ב- a, b ואינו תלוי בערך של c.

ב. עובר בנקודה $(c, f(c))$ שעל הגרף.

עקרונית $a, b, c \in \mathbb{R}$ אבל הטענות וההוכחות לא מסתמכות על תכונות הממשיים, ונכונות מעל כל שדה (עם מציין מתאים). כמו כן, שימו לב כי אין במהלך ההוכחה הנחה לגבי הסדר של a, b, c או על כך שהם בהכרח שונים.

המשחק עם היישומון מאוד משכנע בנכונות הטענה, אבל זו לא הוכחה. בכיתה אפשר להוסיף את המשפט הבא אחרי תצפית מעניינת ולפני שמתחילים לעסוק בהוכחה – "נכון שזה שווה הוכחה!"[ii]

הוכחה

הפונקציה f מוגדרת כמכפלה של שלושה גורמים, אבל לצורך הוכחת הטענה נסתכל עליה כמכפלה של שני גורמים - הראשון $(x-a)(x-b)$, והשני $(x-c)$. עכשיו נגזור בעזרת כלל המכפלה של נגזרות:

$$f'(x) = [(x-a)(x-b)]' \cdot (x-c) + (x-a)(x-b)$$

אם נסמן $g(x) = (x-a)(x-b)$, אז g היא פונקציה ריבועית, והקדקוד שלה נמצא בנקודה $x = \frac{a+b}{2}$, ולכן:

$$g'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$$

ולכן:

$$f'(\frac{a+b}{2}) =$$

$$= 0 \cdot (\frac{a+b}{2} - c) + (\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - a) =$$

$$= \frac{b-a}{2} \cdot \frac{a-b}{2} =$$

$$= -\frac{1}{4}(a-b)^2 =$$

ולכן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(x_m, f(x_m))$ שעליו הוא: $-\frac{1}{4}(a-b)^2$.

במילים אחרות, השיפוע תלוי אך ורק ב- a, b ואינו תלוי בערך של c.

בכך הוכחנו את סעיף א.

אם במקרה $x_m = c$ אז הנקודות $(x_m, f(x_m))$ ו- $(c, f(c))$ מתלכדות, והטענה מתקיימת באופן טריוויאלי.

אחרת - נחשב את שיפוע הישר העובר דרך הנקודות $(x_m, f(x_m))$ ו $(c, f(c))$:

$$m = \frac{f(x_m) - f(c)}{x_m - c}$$

מתקיים:

$$f(x_m) - f(c) =$$

$$= \left[\frac{b-a}{2} \cdot \frac{a-b}{2}(x_m - c)\right] - 0 =$$

$$-\frac{1}{4}(a-b)^2(x_m - c)$$

ולכן:

$$m = \frac{f(x_m) - f(c)}{x_m - c} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}(a-b)^2(x_m - c)}{x_m - c} =$$

$$= -\frac{1}{4}(a-b)^2$$

יש רק ישר אחד העובר בנקודה $(x_m, f(x_m))$ עם שיפוע $-\frac{1}{4}(a-b)^2$ ולכן הנקודה $(c, f(c))$ נמצאת על המשיק.

האם התופעה שראינו מיוחדת לפולינומים ממעלה שלישית?

האם הטענה הזו מיוחדת לפולינומים ממעלה 3? האם אפשר להכליל לפולינומים מסדר גבוה יותר, ואולי אפילו לפונקציות נוספות?

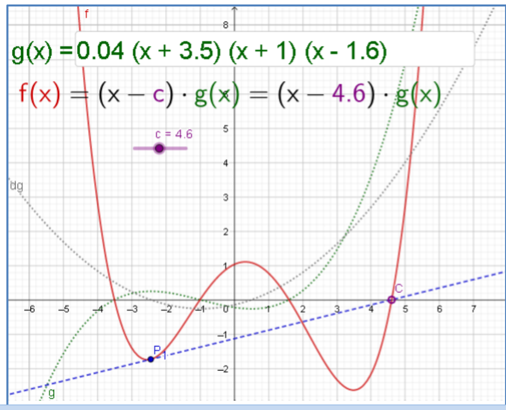
התבוננות ויזואלית מביאה אותנו פעמים רבות להכללה או תובנה עמוקה יותר של הבעיה. במקרה זה דווקא המבנה של ההוכחה מזמן הכללה מאוד פשוטה, וגם שופך קצת אור על מה כל כך מיוחד בנקודה $\frac{a+b}{2}$.

הטענה הבאה מכלילה את טענה 1, ומראה באופן דומה עבור מקרה כללי יותר. מצורף כאן קישור לישומון המדגים את הטענה. בסימונים של הטענה ניתן לשנות בישומון את הערך c וכן את הפונקציה הנתונה g .

טענה 2

נניח כי g פונקציה כלשהי, לאו דווקא פרבולה מתוקנת, ו- c כלשהו.

ונגדיר פונקציה $f(x) = g(x)(x-c)$.



יישומון דינמי : **המקרה הכללי**

מתקיים:

א. אם נניח כי g גזירה, אז בנקודה x_0 עבורה $g'(x_0) = 0$ מתקיים ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $(x_0, f(x_0))$ איננו תלוי בערך של c והוא שווה ל- $g(x_0)$.

ב. בהינתן נקודה x_0 כך ש $x_0 \neq c$, מתקיים כי שיפוע הישר העובר דרך שתי הנקודות $(x_0, f(x_0))$, $(c, f(c))$ איננו תלוי בערך של c והוא שווה ל- $g(x_0)$.

הוכחה

א. החישוב כאן הוא ישיר:

$$f'(x_0) = g'(x_0) \cdot (x_0 - c) + g(x_0) = g(x_0)$$

ב. גם כאן ההוכחה מיידית - שיפוע הישר שווה ל-

$$\frac{f(x_0) - f(c)}{x_0 - c} = \frac{g(x_0)(x_0 - c) - 0}{x_0 - c} = g(x_0)$$

מסקנה מיידית משתי ההערות הנ"ל היא, כי לכל נקודה x_0 עבורה $g'(x_0) = 0$ מתקיים כי הנקודה $(c, f(c))$ נמצאת על המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(x_0, f(x_0))$.

כלומר, טענה 1 היא מקרה פרטי של טענה 2, זהו המקרה שבו הפונקציה g היא פונקציה ריבועית מהצורה $g(x) = (x-a)(x-b)$. הנקודה $x_0 = \frac{a+b}{2}$ היא הנקודה היחידה שבה מתקיים $g'(x_0) = 0$, ולכן נובע מסעיף א' כי שיפוע המשיק דרכה לפונקציה f איננו תלוי בערך של c – זהו תוכן טענה 1 סעיף א. וההפתעה העיקרית שלנו, שהמשיק דרך הנקודה x_0 עובר דרך הנקודה על הגרף שבה $x = c$ נובעת בעצם מסעיף ב של טענה 2, שכן או שהנקודות מתלכדות, או שהן שונות, ואז דרך הנקודה $(x_0, f(x_0))$ יכול לעבור רק ישר אחד ששיפועו $g(x_0)$.

אפשר בהחלט לעצור כאן, אבל אולי אפשר להפיק עוד קצת תובנות לגבי היכולת שלנו כמורים להביא ולהציג תכנים לכיתה. במאמר זה אנו מבקשות להתאים את המהלך הנוכחי לכיתה, בבחינת תאימות וזמן.

הטענה שלנו היא שלא צריך לחכות לתוצאות יפות ומפתיעות – כלומר, לתופעות מעבר לתכנית הלימודים כדי לעשות פעילות חקר עם הכיתה[iii].

לזמן חוויות כחלק משגרת ההוראה

במאמר זה אנו מבקשות להפיח רוח חיים בתרגילים קיימים, כפי שהוצג למעלה. תכנית הלימודים מזמנת לנו בשפע הזדמנויות כאלו. לא כל שיעור, ולא כל תרגיל צריך להיות מוצג כך, אבל אין סיבה לא לעבוד כך עם חלק מהתכנים. תרגילים בעלי היבט או מרכיב דינמי ויזואלי באופן טבעי מזמנים הצגה כזו, בעיקר בזכות כלים כמו דסמוס וגאוגברה.

להלן מובאות 4 דוגמאות באנליזה וגיאומטריה, הלקוחות מספרי לימוד שונים וברמות לימוד שונות, המאפשרות אפיון של מצב מתמטי מסוים מנקודת מבט אחרת.

אחת הדוגמאות שאנחנו מציגות נעזרת שימוש במרכיב דינמי ויזואלי.

נפתח בגאומטריה. תרגילים בגאומטריה ממש מזמנים הצגה באופן המתואר.

רוב התרגילים שמופיעים בספרי הלימוד מופיעים עם סרטוט ובפורמט של – נתון, צריך להוכיח. אם רק נוציא את הסרטוט, ואת מה שצריך להוכיח ונישאר עם הנתונים, יש לנו קרקע פורייה לחקר. כן, זה דורש הרבה זמן להכין מראש, ולא כל תרגיל מתאים לזה, וגם לא כל שיעור. (לפעמים אנחנו פשוט רוצים שיתרגלו רשימה של תרגילים, וגם לזה יש ערך).

דוגמה (1) גיאומטריה:

כאשר תרגיל מופיע כסרטוט עם נתונים ומה שצריך להוכיח, אלמנט הבנייה והגילוי נעדרים כליל. להלן דוגמה מעובדת המבוססת על תרגיל סטנדרטי מתוך "מתמטיקה 5 יח"ל ב-1"[iv].

נתון <u>היישומון הבא</u>, ביישומון עצמו יש רק מעגל וסרגל גלילה. כל שלב בסרגל הגלילה מוסיף עוד נתון. במקום לספר את הנתון לכיתה אפשר לבקש מהם לתאר את הנתון.

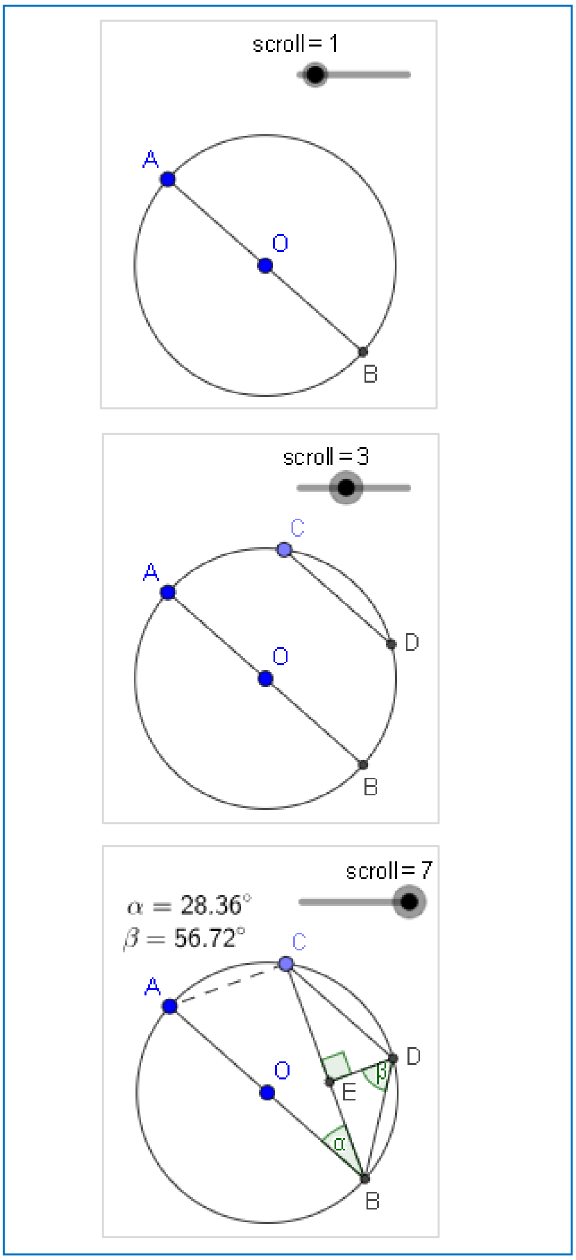
בשלב הסופי מסומנות שתי זוויות α,β. במקום להפנות את תשומת הלב לכך שיש כאן זווית אחת שכפולה מהשניה – אפשר לשאול את הכיתה איזו זווית גדולה יותר? ועכשיו - נזיז את הנקודה C.

ונשאלת השאלה, מתי הזווית α תהיה גדולה יותר מהזווית β?

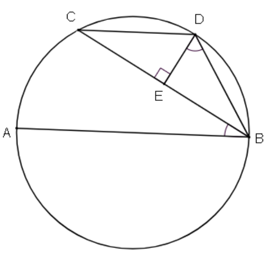
בפועל זה אף פעם לא קורה, אבל סביר להניח שבמהלך ההתבוננות אחד התלמידים ישים לב, שאולי תמיד הזווית הגדולה יותר היא לא סתם גדולה יותר אלא היא פי שתיים גדולה יותר.

גילוי! השערה! ואז גם נשאר להוכיח.

באיור 3 מופיע התרגיל בניסוח המקובל בספרי הלימוד, רק כדי לשים לב מצד אחד להבדל באופי המשימה, ומצד שני לאפשרות שלנו לעבד תרגילים רגילים מספרי הלימוד.



איור 2: זוויות במעגל – שלושה מתוך 8 שלבים החושפים תופעה צעד אחר צעד ביישומון



AB הוא קוטר במעגל,

CD הוא מיתר המקביל ל- AB.

E נקודה על המיתר CB כך ש- $DE \perp CB$.

הוכיחו: $\sphericalangle BDE = 2\sphericalangle ABC$

איור 3: זוויות במעגל – התרגיל בניסוח המקובל בספרי הלימוד

דוגמה (2) גיאומטריה:

ומה קורה אם אין מחשב, או לא הספקנו להכין או למצוא יישומון מתאים?

אופן ההצגה של התרגיל הבא בהשראת "כל הכיתה-כל הזמן" של קובי גוטרמן (גוטרמן, 2008). **כל התלמידים מתבקשים** לסרטט במחברת מעגל, ולהעביר קוטר שקצותיו A, B. לא ממשיכים לפני שכולם מסרטטים. אחר כך יש לבחור נקודות C, D כל אחת בחצי אחר של המעגל (ולחבר את המיתר ביניהן), ונקודה E כלשהי על הקוטר. מהנקודה E מעבירים אנכים למיתרים AC, AD הפוגשים את המיתרים בנקודות F, G בהתאמה.

בדרך כלל ימצא לפחות תלמיד אחד בכיתה שישאל אם זה חשוב איפה הנקודה E ביחס למיתר CD, וזו הזדמנות נהדרת להציע לחלק מהכיתה לבחור את הנקודה E בין A למיתר, ולחלק מהכיתה בין B למיתר. ואולי אפילו יהיה תלמיד שיסמן על המשך הקוטר.

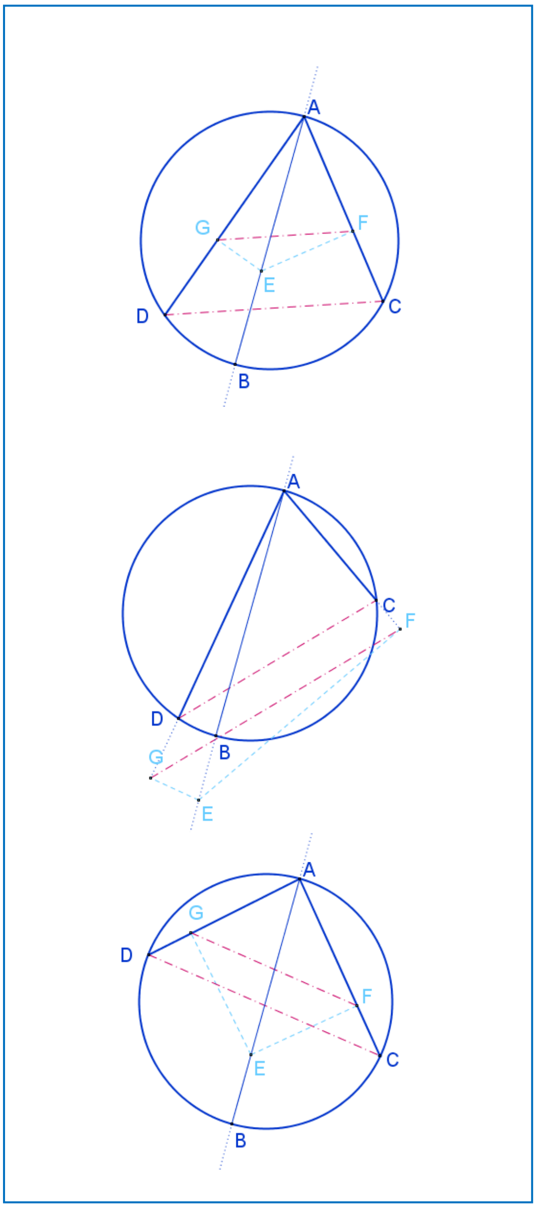
כשכולם (או לפחות הרוב) מסיימים, לשאול אם למישהו יש השערה לגבי הקשר בין המיתר DC לבין הקטע FG.

באיור 4 מצורפים מספר סרטוטים אפשריים (ואולי גם אתם סרטטתם בצד).

האם לכם כקוראים יש השערה?

מישהו מעז לומר שבסרטוט שלו הם נראים מקבילים. עכשיו אפשר לשאול את הכיתה – האם יש עוד מישהו שאצלו במקרה יצא מקביל? האם יש מישהו שלא?[v] ושוב אלמנט ההפתעה מוביל לגילוי באמצעות העלאת השערה, ניסוח הטענה והוכחה.

נעבור עכשיו לדוגמאות באנליזה. גם כאן מרכיב הדינמיות והוויזואליות מאוד נוכחים, ולכן מזמנים הצגה מתאימה של נושא או תרגיל בודד. בהמשך מתוארות שתי בעיות קיצון.



איור 4: שלושה איורים העונים למשימה שבדוגמה 2

במבוא לספר "ללמוד וללמד אנליזה" (משרד החינוך, 2013) נכתב כי ניתן ורצוי, במידת האפשר, לשלב את העיסוק במתמטיקה עם גישות שונות להוראתה, וכי למידה, לרבות למידה של מורים, משמעותית יותר בתהליך של למידה פעילה.

בדומה לפעילויות המוצעות בספר, אנו מציעות 'תרגילים רגילים', פעילויות שבאמצעות העיסוק בהן המורים יכולים

לפתח את הידע המתמטי שלהם מחד, ולחוות את הפוטנציאל הלימודי הטמון בפעילויות הללו, מאידך.

פעילויות כאלה שניתן לקחת כלשונן לכיתה ולהפעילן עם תלמידים, וכאלה הדורשות עיבוד והתאמה לצורך שילובן בכיתה.

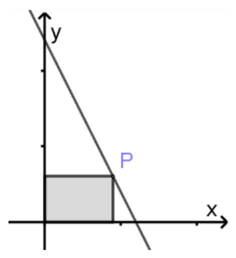
תרגילים אלו נועדו להאיר נקודות מבט חדשות, לחדד הבנה קונספטואלית ,לקשר בין תחומים ועקרונות מתמטיים שונים, להדגים יישומים שונים של האנליזה ברמות השונות, ולאוכלוסיות השונות של התלמידים.

ההרגל לחשוב על מה יקרה אם יחול שינוי קל בנתונים. רעיונות כאלה אפשר וכדאי לקחת וליישם גם עם התלמידים על-ידי חיבור שאלות מתאימות.

דוגמה (3) - בעיית קיצון

המקרה המעניין של המשיק לפולינום ממעלה שלישית, כמו גם שתי הדוגמאות שהצגנו למעלה, עלולים להשאיר את הרושם כי יצירת חוויה כזו מתאימה רק לקבוצות לימוד חזקות או לחומר בשלב מתקדם של הלימוד. אנו בוחרות להציג בעיית קיצון סטנדרטית במיוחד, ומהפשוטות שבהן. בכל ספר לימוד אחת הבעיות הראשונות בבעיות קיצון היא בעיה בסגנון הבא (הדוגמה באיור 5 מעובדת מתוך ספר לימוד מתמטיקה ברמת 4-5 יחידות (גורן).

בין גרף הישר $y = -2x + 12$ והצירים חסום מלבן. קדקוד המלבן P נמצא על הישר. יש למצוא את המלבן בעל השטח המקסימלי.



איור 5: גם בבעיית ערך קיצון פשוטה גלום פוטנציאל לחקר

זו בעיה שאפשר להיתקל בה בכל כיתה הלומדת אנליזה. בין אם זו כיתה הלומדת ברמה של שלוש יח"ל, ובין אם זה שיעור ראשון בנושא בכיתה של חמש יח"ל.

כיוון שזהו תרגיל מהראשונים בבעיות קיצון, מומלץ קודם לשאול שאלות המתאימות לניסיון של התלמידים בתרגילים כאלו עד עכשיו, לדוגמה:

מהו שטח המלבן כאשר $P = (3, y(3))$

עבור איזו נקודה P מתקבל מלבן ששטחו שווה ל- 10

בעזרת היישומון המצורף אפשר לענות על השאלות באופן מיידי ללא ביצוע החישובים הנדרשים. (אפשר כמובן לתאר את החישובים שיש לבצע, אבל זו לא מטרת התרגיל.) תוך כדי הדיון אפשר לשאול מה קורה אם נותנים לנקודה להיות על אחד הצירים, ובאופן כללי מה המגמה של ערכי שטח המלבנים המתקבלים כך. מתוך הדיון הזה מגיעים לשאלה

- מתי מתקבל מקסימום?

כמובן שאחר כך יש לפתור גם אנליטית (על-ידי גזירה, או על-ידי שימוש בתכונות הפרבולה).

מה שמעניין בתרגיל הזה שהוא כל כך פשוט וראשוני – כבר בעצם ההצגה שלו יוצרים חוויה ויזואלית של תצפית בתופעה, בניסוחה, ובהוכחה שלה. באופן ספציפי באחת הכיתות שלימדנו בהן, מיד גם עלתה ההשערה שהנקודה עבורה מתקבל המקסימום חייבת בהכרח להיות באמצע הקטע המחבר בין נקודות החיתוך של הישר עם הצירים. אפשר גם להמשיך ולשאול אם התופעה שראינו מיוחדת לישר שבדקנו, או לישרים עם שיפוע 2-, וכך להפוך גם את התירגול שבהמשך לחיפוש תשובה לשאלה שעולה בכתה באופן טבעי.

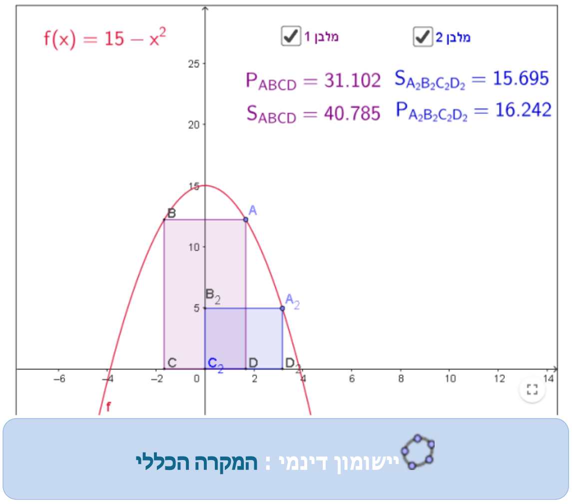
העובדה שהיה מחשב בכיתה אפשרה בדיקה ויזואלית מיידית של ההשערה[vi]. מצורף כאן יישומון המדגים זאת. [כמובן שזהו יישומון יותר 'יפה' ממה שאלתרנו על המקום בכיתה]. אחר כך הוכחנו גם אנליטית – זו הוכחה באמת פשוטה, והינה כבר בשיעור הראשון בבעיות קיצון היה לנו בכיתה מיני- חקר.

דוגמה (4) בעיות קיצון

בהמשך הפרק מופיעה הבעיה הבאה:

בין גרף הפרבולה $y = 15 - x^2$ וציר ה- x ברביעים הראשון והשני חסום מלבן $ABCD$, כך שהצלע CD מונחת על ציר x. מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

אנו ממליצות להשאיר את הספר סגור ולהציג את הבעיה קצת אחרת, בעזרת היישומון המצורף. אגב בעיית הקיצון, שהיא כאמור שגרתית לגמרי, ואולי לא כל כך מעניינת בפני עצמה, אנו מציעות להציף טעות נפוצה הקשורה למלבנים והיא, שככל שהשטח של מלבן גדול יותר כך גם ההיקף שלו, ולהפך. בנוסף, זו הזדמנות להסתכל על שני מלבנים שנראה שאחד הוא חצי של השני, ולכן יש ציפייה שמקרי קיצון (של שטח ושל היקף) יתקבלו באותו המקום עבור שני המלבנים.



במקום לבנות רק את המלבן המוצע בשאלה המקורית, נבנה שני מלבנים – אחד כמו שמוצע בבעיה, והשני חסום בין גרף הפרבולה והצירים ברביע הראשון. לגבי שני המלבנים לשאול שאלות לגבי ההיקף והשטח.

א. מה קורה בקצוות?

ב. לאור הערכים שאנו רואים בעין, והערכים שצפינו בקצוות האם סביר יותר שאנחנו מחפשים שטח\היקף מינימלי או מקסימלי?

ג. היכן אכן מתקבל הקיצון? (היעזרו ביישומון בלבד, ללא חישובים.)

שימו לב, כשהתלמידים בכיתה נחשפים לבעיה, הם כבר יודעים שהם אמורים לחפש ערך קיצון, אבל הם לא יודעים אם מדובר במינימום או מקסימום! על התלמידים **להחליט תוך כדי התבוננות**.

אחרי שעונים באופן מלא על שאלת הקיצון, שהיא כאמור נושא הלימוד המרכזי בשלב זה, אפשר להמשיך ולשאול שאלות על התופעה.

ד. האם המקסימום מתקבל באותו המקום עבור השטח וההיקף?

ה. האם המקסימום מתקבל באותו המקום עבור שני המלבנים (באחד מהם כן ובשני לא)? מה ההבדל ביניהם?

אנחנו מרוויחים כאן פעמיים. גם חוויה של גילוי בבעיית קיצון שגרתית, וגם עיסוק בטעות נפוצה בקשר בין שטח והיקף מלבן.

נוסיף ונעיר, כי יש כיתות שיכול להתפתח בהן דיון בכיוון הבא: האם גם כאן כמו בדוגמה הקודמת אפשר למצוא את מיקום המקסימום, כאשר הפונקציה המקורית מוגדרת בעזרת פרמטרים ולא פונקציה מסוימת?[vii]

דיון

שילוב היבטים רגשיים בהוראת המתמטיקה והרצון לתת לתלמיד את תחושת החוויה, נובעת מתוך תפיסה שאין זה נכון להפריד בצורה מלאכותית בין קוגניציה ורגש. הוראת המתמטיקה היא אינה תחום קוגניטיבי טהור, לעומת שיעור כישורי חיים העוסק בתחום הרגשי בלבד. לסיפורי הלמידה שתלמידים יוצרים לעצמם, ולסיפורי הלמידה שמורים יוצרים לתלמידים, יש השפעה רבה על תפיסתם כלומדים, על הישגיהם, על הצלחותיהם, ועל כישלונם.

תלמידים רבים מדווחים על מוטיבציה נמוכה ללימוד מתמטיקה. אחת הדרכים שמאמר זה מציע הוא ליצור חוויה

מתמטית כמרכיב בסיסי בצמיחתו של הלומד. כאשר אנו מדברות על 'חוויה מתמטית' אנו מתייחסות למשתנים הרגשיים ביחס למתמטיקה, שמהווים פעמים רבות משתנים מתווכים להצלחה או לכישלון. אחת הדרכים לחבב את המתמטיקה על הלומדים, באופן בלתי תלוי לרמת הידע של הלומד, היא להפוך את הלמידה לתהליך אקטיבי של מתן משמעות ויצירת ידע, עיבוד ושינוי של הידע.

במאמר זה אנו מציעות ללומד לשפר את מיומנויותיו ולהרחיב את ידיעותיו. בחלק מהדוגמאות השימוש בכלים הדינמיים איפשר את הגילוי ואת החקר. השימוש בוויזואליזציה מאוד חשוב על מנת למצוא דרך להביא תלמידים להבנתן של ההוכחות, מתוך קריאתן או מתוך הקשבה להצגתן, ולפתח אצלם את היכולת לחבר הוכחות, ולהעלותן על הכתב בצורה מסודרת ומשכנעת כמקובל. אין ספק, שפעילויות מסוג זה מאפשרות להגיע לעומק חשיבה רב, ולספק לתלמיד גורמי הפתעה ועניין שלא קיימים במשימות סטנדרטיות. אך יחד עם זאת, חשוב לנו להדגיש שזהו לא תנאי הכרחי. בדוגמה הראשונה (המשיק לפולינום ממעלה שלישית), התופעה הראשונית אכן "התגלתה" בעזרת יישומון, ואין כמו מראה עיניים להתפעל מהתופעה, אך הגילוי של המקרה הכללי יותר הגיע דווקא מתוך ההוכחה הפורמלית. בדוגמה השנייה הוצגה דרך להפעיל את הכיתה, וריבוי הסרטוטים השונים השיג אף הוא אלמנט של דינמיות, כמו גם מעורבות של כלל הלומדים ברמות השונות.

בספרו "למידה בהקשר חברתי" מציג ויגוצקי את "טווח ההתפתחות הקרובה", שמשמעו המרחק בין רמת ההתפתחות של הלומד, המזוהה עם מה שהוא יכול לעשות בכוחות עצמו, לבין רמת ההתפתחות הקרובה שלו, המרמזת על מה שיוכל לעשות אם יקבל סיוע מעמית מיומן יותר. מושג זה קנה לו פופולריות רבה משום שהוא חוזר ומבהיר את תפקיד המורה כאחראי על תכנון ועיתוי הלמידה, ומציאת דרכי הוראה הולמות (ארנון, 1994). וכאן, עלינו המורים, לראות את עצמינו עמיתים ושותפים של הלומד, בנוסף לעובדה שאנחנו מומחים ודמות לחיקוי. התלמיד זקוק למורה על מנת שיוכל לנכס את האמצעים הטכנולוגיים והמתמטיים, ועל מנת שיוכל להשתמש בהם בפיתוח המחשבות בתהליך פתרון בעיות. הסיפור שהתלמיד מספר לעצמו בזמן ההתמודדות עם הבעיה המתמטית הוא החשוב (Dunlap & Lowenthal, 2013).

מקורות:

ארנון, ר' (1994). למידה במחשבה תחילה, פסיכולוגיה של חשיבה בחיי היום-יום.

גוטרמן, ק' (2008). כל הכיתה כל הזמן. הד החינוך(82(7)), 38-44.

גורן, ב'. (אין תאריך). *מתמטיקה (4 ו-5 יחידות לימוד) חלק א' שאלונים 035804 ו- 035806.* הוצאת המחבר.

גורן, ב'. (אין תאריך). *מתמטיקה (5 יחידות לימוד), חלק ב'-1 שאלון 035806.* הוצאת המחבר בשיתוף עם חברת "רכס פרויקטים חינוכיים".

משרד החינוך (2013). ללמוד וללמד אנליזה. "מעלות" הוצאת ספרים.

Dunlap, J. C., & Lowenthal, P. R. (2013). What Was Your Best LeEarning Experience? Our Story About Using Stories To Solve Instructional Problems. International Journal of Teaching and Learning in Higher Education(2), 269-274.

Nabb, K. (2013, February). Students' Exploratory Thinking about a Nonroutine Calculus Task. The Mathematics Teacher, 106(6), 432-439.

Texas Instruments. (2009, 3 13). Two Investigations of Cubic Functions. Retrieved from https://education.ti.com/en/activity/detail?id=93823A56684E4BD08844E23AAFA8C82C

Vygotsky, L. S. (1930/1978). Mind in society: The development of higher psychological processes (M.Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

ד"ר ענב איזיקוביץ-עודי

מכון דוידסון לחינוך מדעי, מכון וייצמן למדע, רחובות

אסתר גרונהט

התיכון שליד האוניברסיטה.

---

[i] תודה לד"ר סבינה סגרה שחשפה אותנו לנושא והפנתה אותנו לחומרים של Texas Instruments (Texas Instruments, 2009)

[ii] תודה לגב' ציפי אייל על מטבע הלשון: "נכון שזה שווה הוכחה?"

[iii] בהקשר לדוגמה שפתחתנו בה, מעניין לקרוא מהלך הוראה שנעשה עם קבוצת סטודנטים בקורס בחדו"א (Nabb, 2013)

[iv] בני גורן עמוד 776 תרגיל 22.

[v] בדרך כלל יש גם תלמיד כזה, ואפשר לשאול אותו אם הסרטוט שלו באמת מדויק.

[vi] פעילות זו נוסתה בכיתתה של אסתר גרונהט, שמעידה על עצמה: "אני מודה שבתחילה חשבתי שהיא מיוחדת לזה שהיה לנו ישר עם שיפוע 2– "

[vii] מופיע באותו קישור ביישומון שמופיע מתחת ליישומון הקודם.
בעוד התרגיל עצמו מתאים להצגה בכיתות הלומדות ברמות שונות, אופי הדיון הזה מתאים כמובן לכיתות חזקות יותר.