**פיתוח אלגוריתמים מבוססי עקרונות B&B לפתרון Resource Sharing and Scheduling Problem**

**מבוא**

בשנת 1999 פותח אלגוריתם מבוסס עקרון B&B ראשון המותאם למציאת פתרון אופטימאלי ל-RSSP (Samaddar ואחרים, 1999). במסגרת העבודה הנוכחית פותח אלגוריתם חדש למציאת פתרון אופטימאלי לבעיה הנחקרת אשר גם הוא מבוסס עקרון B&B. הפרק הנוכחי סוקר תחילה את העקרונות הכלליים לאלגוריתמים מסוג B&B ואת הקריטריונים להערכת ביצועיהם עפ"י Ibaraki (1987). בהמשך מוצגות אפשרויות שונות ליישום העקרונות לפתרון RSSP. לבסוף, מוצגת השוואה תיאורטית ואמפירית בין האלגוריתם הקיים בספרות לפתרון RSSP לבין האלגוריתמים המוצעים.

## עקרונות והערכת ביצועים של אלגוריתם מבוסס B&B

לצורך מציאת פתרון אופטימאלי לבעיה, קיימת אפשרות לפרוש את כל הפתרונות האפשריים לבעיה ולבחור את הפתרון בעל ערך אופטימאלי (ערך מינימאלי בבעיית מינימיזציה או ערך מקסימאלי בבעיית מקסימיזציה). שיטה זו נקראת *enumeration method* ובד"כ נחשבת לשיטה לא יעילה מאחר וברוב המצבים מדובר על בעיות בעלות מרחב פתרונות עצום. מסיבה זו קיים עניין רב לפתח שיטות יעילות אשר יאפשרו לצמצם את מרחב הפתרונות בו נמצא פתרון אופטימאלי לבעיה. אלגוריתם B&B מייצג אוסף של שיטות אשר נועדו להשיג מטרה זו. בלי להגביל את הכלליות נניח מכאן ואילך שיש לפתור בעיית מינימיזציה.

* 1. **עקרונות של האלגוריתמים מבוססי B&B**

לצורך פיתוח אלגוריתם B&B לפתרון הבעיה חשוב להתמקד בשלושה עקרונות הבאים:

**אופן פירוק הבעיה (branching/ decomposition)**

בעיית אופטימיזציה  ברוב המקרים היא בעיה גדולה אשר ניתנת לייצוג באמצעות קבוצה סופית של תתי בעיות חלקיות קטנות יותר, , כאשר כל תת בעיה בקבוצה ניתנת לייצוג באמצעות קבוצה אחרת של תתי בעיות, . במושגים של B&B כל תת בעיה חלקית נחשבת לענף (*branch*), והתהליך באמצעותו מפרקים את הבעיה לתתי בעיות וקובעים את הקשר ההירארכי שביניהן, נקרא פירוק (*decomposition*).

באמצעות פירוק ניתן לקבל עץ של כל אפשרויות פתרון של  או במילים אחרות, עץ מכוון , כאשר  מהווה קבוצה של צמתים ו- מהווה קבוצה של קשתות מכוונות עם . כל צומת מייצגת תת בעיה וקשת  מציינת שתת בעיה  נוצרת כתוצאת הסתעפות מתת בעיה . על מנת שאלגוריתם חיפוש ימצא פתרון אופטימאלי תוך חקירה של חלק קטן מהענפים, כל תת בעיה חייבת להיות בעלת שני מאפיינים הבאים:

* במידה והושג פתרון אופטימאלי ל- אזי אין צורך להמשיך לפרק את לתתי בעיות נוספות.
* במידה ומתקבלת מסקנה כי לא מכילה פתרון אופטימאלי של  אזי ניתן לחסום (לקטום) את .

ככל שיותר תתי בעיות יקיימו את שני המאפיינים הנ"ל כך החיפוש יהיה יעיל יותר. פעולות החסימה (*bounding operation*) אשר ננקטות במהלך החיפוש משתמשות בעקרונות של מאפיינים אלו.

**אופן צמצום/ חסימת אפשרויות (pruning/ bounding)**

כפי שצוין לפני כן, לצורך צמצום אפשרויות חיפוש בעץ יש לנקוט בפעולות החסימה. ישנן שתי שיטות בסיסיות ליישום פעולות החסימה: מבחן חסם תחתון (*lower bound test*) ומבחן שליטה (*dominance test*).

מבחן חסם תחתון נועד לבדוק האם ערך הפתרון האופטימאלי של תת בעיה, , גבוה או שווה לערך הטוב ביותר של  שהושג בתהליך החיפוש עד לנקודת המבחן, קרי. תת בעיה אשר מקיימת תנאי זה נחסמת, משמע אין צורך להמשיך לפרק את תת הבעיה לתתי בעיות נוספות. מאחר ובעת החיפוש ערך  לא ידוע ומספר תתי בעיות אשר נעמדות בפני מבחן יכול להיות רב, במקום לחשב את מתבצע חישוב (בעל סיבוכיות הרבה יותר נמוכה) של ערך חסם תחתון  של . פונקציה  חייבת להיות בעלת ערך נמוך או שווה לערך של הפתרון האופטימאלי של תת בעיה, קרי, ושווה בדיוק לערך של פתרון אופטימאלי בעלים, , . כאשר  היא קבוצת תתי הבעיות אשר לא ניתנו לפירוק ונפתרו במלואן, משמע הן עלים בעץ החיפוש. בנוסף נגדיר שאם שני חסמים מקיימים ,  אזי חסם  נחשב להדוק (*tighter*) יותר לפתרון מאשר .

מבחן שליטה בודק האם קיימת תת בעיה (נשלטת) אשר בהכרח איננה מכילה פתרון טוב יותר מתת בעיה אחרת (שולטת). בעיות נשלטות ניתנות לחסימה במהלך תהליך החיפוש.

יחס שליטה  הנו יחס בינארי המוגדר על סט תתי בעיות. יחס  אומר שתת בעיה  שולטת על תת בעיה . יחס שליטה  אומר כי  וכאשר , אומר שלכל צאצא של  שהוא  קיים צאצא של ,  המקיים .

חשוב לציין שעל מנת שחסם תחתון הדוק יותר יביא לתוצאות חיפוש יעילות יותר הוא חייב להיות עקבי (*consistent*) עם יחסי שליטה. כלומר, אם מתקיים אזי . אחרת לא ניתן לומר על ביצועי האלגוריתם ביחס להידוק של חסם תחתון.

לצורך תיאור כללי של אלגוריתם B&B נגדיר:

- קבוצה של בעיות חלקיות אשר הורכבו עד לשלב נוכחי של החיפוש.

- קבוצה של תתי בעיות פעילות, כאשר תת בעיה  אשר לא הורכבה או לא נבחנה, נקראת תת בעיה פעילה.

 - חסם עליון הנמוך ביותר.

- פתרון בעל חסם.

 - פונקציית חסם עליון המקיימת , . , .  ערכו של פתרון אפשרי לתת בעיה .

בחינה של תת בעיה פעילה הבאה נעשית עפ"י אסטרטגית חיפוש  כך ש-. באיור 1 ניתן לראות את המבנה הכללי של אלגוריתם B&B.



איור 1 - מבנה כללי של אלגוריתם B&B

**שיטת החיפוש (search strategy)**

כל אלגוריתם B&B תמיד מוצא פתרון אופטימאלי במספר סופי של צעדים ללא תלות באסטרטגית חיפוש . אך יעילות האלגוריתם ומרחב הזיכרון אשר נדרש לביצועו, מאוד תלויים ב-. להלן סקירה של מספר אסטרטגיות חיפוש הנפוצות ביותר.

חיפוש לפי יוריסטיקה (*heuristic search*):

נגדיר  ערך יוריסטי אשר ניתן לחשב עבור . ערכו של  מייצג הערכה לערך אמתי  וניתן לחישוב מהיר. פונקציה חיפוש יוריסטית  הנה , כלומר כל פעם נבחר צומת  בעל ערך של  הנמוך ביותר.

כאשר ניתן לחשב חסם תחתון וחסם עליון לתת בעיה אזי ניתן להשתמש בפונקציה יוריסטית מצורה הבא , .

פונקציה יוריסטית  נקראת לא-מטעה (*nonmisleading*) כאשר עבור כל זוג צמתים  ו- מתקיים:

אם  אזי 

אם  אזי 

חיפוש לפי חסם תחתון הטוב ביותר (*best bound search*):

בחיפוש זה ניתן לראות חיפוש לפי יוריסטיקה כאשר פונקציה יוריסטית במקרה זה היא . פונקציית חיפוש לפי חסם תחתון  הנה , כלומר כל פעם נבחר צומת  בעל ערך של  הנמוך ביותר.

חיפוש לפי עומק (*depth first search*):

בהינתן קבוצת צמתים  ניתן להגדיר תת קבוצה של צמתים אלה שהם בעלי עומק מרבי, 

פונקציית חיפוש לפי עומק  הנה , כלומר כל פעם נבחר צומת  בעל ערך של  הנמוך ביותר.

חיפוש לפי רוחב (*breadth first search*):

בהינתן קבוצת צמתים  ניתן להגדיר תת קבוצה של צמתים בעלי עומק הנמוך ביותר, .

פונקציית חיפוש לפי עומק  הנה , כלומר כל פעם נבחר צומת  בעל ערך של  הנמוך ביותר.

* 1. **הערכת ביצועי האלגוריתם מבוסס B&B**

ביצועי אלגוריתם מבוסס B&B ניתן להעריך לפי כמות העבודה שהושקעה עד למציאת פתרון אפשרי ראשון לבעיה, כמות העבודה שהושקעה עד למציאת פתרון אופטימאלי לבעיה וסה"כ כמות העבודה שהושקעה עד לסיום ריצה של האלגוריתם. מאחר ובתהליך החיפוש מופעלת אסטרטגית חיפוש אשר מבוססת על מיון צמתים, מדד נוסף אשר ניתן להיעזר בו לצורך הערכת ביצועי האלגוריתם הוא ערך מרבי של . לאור כך ניתן להגדיר מדדי ביצוע הבאים:

 - מספר שפורקו עד למציאת פתרון אפשרי ראשון.

 - מספר שפורקו עד למציאת פתרון אופטימאלי.

 - ערך מרבי של  לאורך ריצת האלגוריתם.

 - סה"כ מספר  שפורקו במהלך ריצת האלגוריתם. סה"כ זמן אשר נדרש להפעיל אסטרטגית חיפוש שווה ל-.

בטבלה 1 ניתן לראות את השוואת מדדי ביצוע של כל אחת מאסטרטגיות חיפוש. ניתן לראות כי אסטרטגית חיפוש לפי יוריסטיקה ואסטרטגית חיפוש לפי חסם תחתון הטוב ביותר, בעלות יתרונות בשני מדדי ביצוע, כמות העבודה המושקעת עד למציאת פתרון אופטימאלי וסה"כ כמות העבודה המושקעת עד לסיום ריצת האלגוריתם. אסטרטגית חיפוש לפי עומק היא אסטרטגית חיפוש בעלת שני יתרונות במדדים אחרים, כמות העבודה המושקעת עד למציאת פתרון ראשון לבעיה ומספר מרבי של צמתים פעילים במהלך ריצת האלגוריתם. אסטרטגית חיפוש לפי רוחב היא אסטרטגיה ללא יתרונות במדדי ביצוע בהשוואה לאסטרטגיות אחרות אבל Ibaraki (1987) מדגיש שאסטרטגיה זו יכולה להיות בעל יתרונות זהים לאסטרטגיות אחרות במידה ויש יחסי שליטה טובים.

**טבלה 1 – השוואה של אסטרטגיות חיפוש ביחס למדדי ביצוע**

|  |  |
| --- | --- |
| אסטרטגית חיפוש לפי | מדד ביצוע |
|  |  |  |  |
| יוריסטיקה | + | - | + | - |
| חסם תחתון הטוב ביותר | + | - | + | - |
| עומק | - | + | - | + |
| רוחב | - | - | - | - |

ערכו של  תלוי בערך חסם תחתון. הוכח כי  כאשר . חשוב לבחור ייצוג מתאים של העץ על מנת לגרום לחסם תחתון  להיות כמה שיותר מדויק. בנוסף לכך, על סמך הרצות סימולציה שבוצעו ע"י Ibaraki (1987) ניתן לראות את ההשפעה של  ו- על ערכי  ו- בחיפוש לפי יוריסטיקה, במידה ורוצים להגיע מהר לתוצאות טובות יש להשקיע מאמץ בפיתוח . לעומת זאת, במידה ומעוניינים למצוא פתרון אופטימאלי לבעיה יש להשקיע את רוב המאמץ בפיתוח . בחיפוש לפי עומק, ל- ו- יש השפעה דומה על ערכי  ו-.

## אפשרויות יישום של עקרונות B&B לפתרון RSSP

מטרת הפרק הנוכחי היא להראות פיתוח של אלגוריתם למציאת פתרון אופטימאלי ראשון ל-RSSP (שהיא כזכור בעיית מינימיזציה). אלגוריתם המנצל בצורה טובה ככל הניתן את מה שידוע על ביצועי האלגוריתמים מבוססי B&B מהספרות ואת ההכרות עם RSSP וכך להגיע למספר אפשרויות יישום אשר יבחנו בניסוי אמפירי. לפיכך החלטות עקרוניות לצורך יישום אלגוריתם מבוסס B&B יתבססו על קריטריוני ההחלטה הבאים:

* מרחב זיכרון נדרש – למרות שבימינו הגדלת זיכרון מחשב זו לא בעיה מהותית, עדיין נרצה שאלגוריתם חיפוש ינצל כמה שפחות זיכרון מחשב. אם מדובר בבעיה גדולה אשר דורשת הרבה זמן ריצה זה יגזול זיכרון מחשב רב. הדבר יכול להוות מגבלה למציאת פתרון אופטימאלי לבעיה.
* כמות העבודה הנדרשת עד לקבלת פתרון ראשון – קבלת פתרון ראשון מהווה נקודה בעלת חשיבות רבה בתהליך החיפוש מאחר והחל מנקודה זו ניתן לחסום אפשרויות אחרות.
* איכות פתרון ראשון – ככל שפתרון ראשון יהיה קרוב לפתרון אופטימאלי כך יש יותר סיכוי שתתאפשר חסימה גדולה יותר של אפשרויות.
* ניצול מרבי של חסם תחתון – יש להתייחס למאפייני חסם תחתון על מנת להשיג חסם תחתון הדוק לפתרון אשר יאפשר חסימה של יותר אפשרויות.
* מורכבות היישום – דרגת מורכבות היישום משפיעה לא רק על כמות עבודת החישוב הנדרשת אלא גם על מורכבות עבודת התכנות והבדיקות הנדרשות עבורה. וכן על אמינות המערכת שמממשת את האלגוריתם.
* כמות העבודה הנדרשת עד לסיום ריצת האלגוריתם – רק בתום ריצת האלגוריתם ניתן לקבל מסקנה שפתרון שנמצא הוא פתרון אופטימאלי.
	1. **אופן פירוק הבעיה (branching/ decomposition)**

בבעיה הנחקרת מדובר על שלושה מישורים עיקריים של קבלת החלטות:

* הקצאת משאבים – מישור זה עוסק בקבלת החלטה על אופן ביצוע של הפעולות, קרי מהם המשאבים שיבצעו את הפעולות.
* סידור פעולות – החלטה זו מתייחסת למיקום ביצוע של הפעולה על המשאב שמבצע אותה או במילים אחרות, מהו סדר הביצוע של הפעולות על המשאבים.
* תזמון פעולות – קביעת זמן התחלת ביצוע פעולה על המשאבים אשר מבצעים אותה.

פתרון ל-RSSP חייב לכלול החלטה בשלושת המישורים הנ"ל. תהליך פירוק הבעיה לתתי-בעיות במבנה של עץ B&B מגדיר למעשה באיזה סדר ושיטה החלטות אלו מתקבלות. להלן דיון על האפשרויות השונות לפירוק הבעיה.

**סוגי צמתים בעץ וסדר קביעת ההחלטות:**

לא ניתן לקבוע סידור של פעולות על המשאב מבלי לקבוע בו זמנית (או קודם לכן) הקצאה של פעולות למשאב. ניסיון לקבוע תזמון של פעולות ורק לאחר מכן לחפש פתרונות של הקצאה וסידור שיתאימו לתזמון שקבענו יציב אתגר מורכב ביותר שכן התזמון ללא החלטות מראש של הקצאה יהיה שרירותי במידה רבה. לאחר החלטת הקצאה ניסיון לקבוע תזמון ורק לאחר מכן סידור איננו אפשרי כי בעצם קביעת התזמון נקבע גם סידור. לפיכך הוחלט על שלושה סוגי צמתים (בנוסף לצומת שורש הבעיה) כאשר בכל סוג של צומת תתקבל החלטה במישור אחד בלבד. להלן פירוט סוגי הצמתים ומיקומם הסידורי בעץ:

* צומת הקצאה – בצמתים מסוג זה תתקבל החלטה על הקצאת משאבים לפעולות (מהם המשאבים שיוקצו לביצוע הפעולות בבעיה). צומת זה יופיע כראשון מתחת לצומת שורש הבעיה.
* צומת סידור – בצמתים מסוג זה תתקבל החלטה על סידור פעולות על המשאבים (באיזה סדר יש לבצע את הפעולות על המשאבים). צומת זה יופיע מתחת לצומתי ההקצאה.
* צומת תזמון – בצמתים מסוג זה תתקבל החלטה על תזמון פעולות על המשאבים (באיזה זמנים תחל ביצוע של הפעולות על המשאבים שהוקצו לביצוען). צומת זה יופיע מתחת לצומת סידור.

במילים אחרות, במהלך חיפוש הפתרון, תתקבל החלטה על הקצאת המשאבים לפעולות, רק לאחר מכן בהתאם להקצאה שנבחרה יקבע סדר ביצוע פעולות על גבי המשאבים ובתחתית העץ יקבעו זמני ביצוע מדויקים של הפעולות על המשאבים שהוקצו לפי סדר ביצוע פעולות שנבחר. ראוי לציין שסדר זה תואם את הסדר שנבחר אם כי לא נומק כפי שנעשה כאן, על ידי Samaddar ואחרים (1999).

**אפשרויות החלטה בכל צומת:**

בכל סוג צומת מתקבלת החלטה הקשורה למשאב והחלטה הקשורה לפעולה המתבצעת על אותו משאב. מאחר ובבעיה בד"כ מדובר על מספר משאבים ומספר פעולות, יש כעקרון ארבע אפשרויות החלטה בכל צומת:

* החלטה מתקבלת על משאב אחד ופעולה אחת, יחס **1:1**
* החלטה מתקבלת על מספר משאבים ופעולה אחת, יחס **רבים:1**
* החלטה מתקבלת על משאב אחד ומספר פעולות, יחס **1:רבים**
* החלטה מתקבלת על מספר משאבים ומספר פעולות, יחס **רבים:רבים**

בהמשך הפרק מובאים דיונים והשוואות המתייחסים לסוג היחס שכדאי לנקוט בצמתים מסוג הקצאה וצמתים מסוג סידור.

**צמתים מסוג הקצאה**

טבלה 2 מציגה החישוב של סה"כ מספר צמתים שיכול להתקבל כתוצאה מכל סוג החלטה בקשר להקצאת המשאבים. מספר צמתים מרבי בעץ תלוי במספר רמות ובמספר הסתעפויות בכל רמה.

**טבלה 2 – אפשרויות החלטה בצומת הקצאה לפי קריטריון מרחב זיכרון נדרש**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| מספריחס | רמות | הסתעפויות ברמה | צמתים |
| 1:1 |  |  - בכל צומת מתקבלת החלטה על אופן ביצוע פעולה  |  |
| 1:רבים |  |  - מספר צירופי אופנים אפשריים של הפעולות אשר יכולות להתבצע על משאב  |  כאשר  ולכן מספר צמתים חסום ע"י |
| רבים:1 |  |  - בכל צומת מתקבלת החלטה על אופן ביצוע פעולה  |  |
| רבים:רבים | 1 |  - מספר צירופי אופנים אפשריים של הפעולות. מספר צירופים חסום ע"י  |  |

בטבלה 3 ניתן לראות את השיקולים לגבי שאר קריטריוני ההחלטה בכל אחת מאפשרויות ההחלטה.

**טבלה 3 – אפשרויות החלטה בצומת הקצאה לפי קריטריוני ההחלטה (מלבד קריטריון מרחב זיכרון נדרש)**

|  |  |
| --- | --- |
| קריטריון החלטה | שיקולים |
| כמות העבודה הנדרשת עד לקבלת פתרון ראשון | כמות העבודה אשר נדרשת לקבלת פתרון ראשון תלויה בשיטת החיפוש, גודל העץ ואיכות פתרון ראשון. מבחינת דיון נוכחי נתייחס רק למרכיב של גודל העץ כמאפיין אשר משפיע על הקריטריון הנבחן.כפי שצוין בטבלה 2, גודל העץ (סה"כ מספר צמתים) הנמוך ביותר הוא ביחס רבים:רבים. |
| איכות פתרון ראשון | איכות של פתרון ראשון תלויה בשיטת החיפוש ביחס לדיון הנוכחי מדובר על פתרון אפשרי לבעיה אשר כולל מידע על זימון של כל הפעולות על כל המשאבים אשר הוקצו לבצע אותן ולכן אין הבדל בין אפשרויות ההחלטה. |
| ניצול מרבי של חסם תחתון | יחס 1:1 – ביחס זה משאב נבחר לבצע פעולה אחת. בבחירה זו אין תוספת גדולה של מידע לערכו של חסם תחתון המחושב על סמך אורך נתיב קריטי של הפעולות ו/או חסם תחתון המבוסס על חישוב עומס העבודה על המשאב, מאחר ומעצם הבחירה לא בטוח שיהיה ברור מהו משך ביצוע של הפעולות.יחס 1:רבים – ביחס זה למשאב אחד נבחרות כל הפעולות אשר יכולות להתבצע עליו. בבחירה תהייה תוספת יותר גדולה של המידע לערכו של החסם המבוסס על אורך נתיב הקריטי ועל עומס העבודה על המשאב, בהשוואה ליחס 1:1, בגלל שיבחרו מספר פעולות.יחס רבים:1 – ביחס זה לפעולה אחת נבחרים כל המשאבים אשר יבצעו אותה. בבחירה זו תהייה תוספת מידע גדולה יותר לחסם תחתון המבוסס על חישוב אורך נתיב קריטי, בהשוואה ליחס 1:1, ותהייה תוספת קטנה יותר של המידע לחסם תחתון המבוסס על עומס העבודה על המשאב, בהשוואה ליחס 1:רבים. מעצם הבחירה נדע מהו משך ביצוע של הפעולה אחת.יחס רבים:רבים – ביחס זה לכל המשאבים ידוע מהן הפעולות אשר אמורות להתבצע עליהם. בבחירה זו נדע מהו משך ביצוע של הפעולה ומהן הפעולות אשר מתבצעות בכל אחד מהמשאבים. מבחינת חסם תחתון המבוסס על אורך נתיב הקריטי ו/או עומס העבודה על המשאב, ביחס זה יש תוספת מידע הגדולה ביותר בהשוואה לשאר יחסים. |
| מורכבות היישום | אין הבדל בין האפשרויות. |
| כמות העבודה הנדרשת עד לסיום ריצת האלגוריתם | ניתן לומר בהערכה כי ניצול טוב יותר של חסם תחתון ועץ קטן יותר, יביאו בסה"כ לפחות עבודה הנדרשת להשלמת ריצת האלגוריתם. |

לסיכום הדברים שהועלו עד כה, עבור אפשרויות ההחלטה **בצמתי הקצאה**, ניתן לראות כי קיימת עדיפות ליחס **רבים:רבים** בארבעה קריטריוני החלטה הבאים: מרחב זיכרון נדרש, כמות העבודה הנדרשת עד לקבלת פתרון ראשון, ניצול מרבי של חסם תחתון וכמות העבודה הנדרשת עד לסיום ריצת האלגוריתם. בשאר קריטריוני החלטה אין הבדל בין ארבע האפשרויות הנ"ל ליישום ההחלטה.

**צמתים מסוג סידור**

טבלה 4 מציגה החישוב של סה"כ מספר צמתים שיכול להתקבל כתוצאה מכל סוג החלטה בקשר לסידור הפעולות על המשאבים. מספר צמתים מרבי בעץ תלוי במספר רמות ובמספר הסתעפויות בכל רמה.

**טבלה 4 – אפשרויות החלטה בצומת סידור לפי קריטריון מרחב זיכרון נדרש**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| מספריחס | רמות | הסתעפויות ברמה | צמתים |
| 1:1 | - לכל משאב מספר רמות כמספר משימות על המשאב () | מספר הסתעפויות לרמה של משאב הולך ופוחת ממספר מרבי השווה ל- למספר מינימאלי השווה ל-1 |  |
| 1:רבים |  |  - מספר סידורים אפשריים של הפעולות אשר יכולות להתבצע על משאב . מספר סידורים חסום ע"י  |  |
| רבים:1 |  | מספר הסתעפויות לרמה שווה למספר צירופים אפשריים של הפעולה בתור משימה על המשאב . מספר זה חסום ע"י . |  |
| רבים:רבים | 1 | כל הפתרונות האפשריים |  |

בטבלה 5 מוצגים השיקולים לגבי שאר קריטריוני ההחלטה אשר הוגדרו לפני כן.

**טבלה 5 – אפשרויות החלטה בצומת הקצאה לפי קריטריוני ההחלטה (מלבד קריטריון מרחב זיכרון נדרש)**

|  |  |
| --- | --- |
| קריטריון החלטה | שיקולים |
| כמות העבודה הנדרשת עד לקבלת פתרון ראשון | כמות העבודה אשר נדרשת לקבלת פתרון ראשון תלויה בשיטת החיפוש, גודל העץ ואיכות פתרון ראשון. מבחינת דיון נוכחי נתייחס רק למרכיב של גודל העץ כמאפיין אשר משפיע על הקריטריון הנבחן.כפי שהוזכר לפני כן, גודל העץ (סה"כ מספר צמתים) הנמוך ביותר הוא ביחס רבים:רבים. |
| איכות פתרון ראשון | איכות של פתרון ראשון תלויה בשיטת החיפוש ביחס לדיון נוכחי מדובר על פתרון אפשרי לבעיה אשר כולל מידע על זימון של כל הפעולות על כל המשאבים אשר הוקצו לבצע אותן ולכן אין הבדל בין אפשרויות ההחלטה. |
| ניצול מרבי של חסם תחתון | יחס 1:1 – ביחס זה נבחרת פעולה אחת להתבצע בתור משימה על המשאב. בבחירה זו תתקבל תוספת גדולה של מידע לערכו של חסם תחתון המחושב על סמך אורך נתיב קריטי של הפעולות ו/או חסם תחתון המבוסס על חישוב עומס העבודה על המשאב, ככל שנתקדם לרמה אחרונה של המשאב.יחס 1:רבים – ביחס זה למשאב אחד נבחרות כל הפעולות אשר יכולות להתבצע על המשאב בסדר ביצוע אפשרי. בבחירה זו יש תוספת מידע מרבית לערכו של החסם המבוסס על אורך נתיב הקריטי ועל עומס העבודה על המשאב.יחס רבים:1 – ביחס זה פעולה אחת מקבלת מיקום על כל אחד מהמשאבים המבצעים אותה. בבחירה זו תהייה תוספת מידע קטנה גם לחסם תחתון המבוסס על אורך נתיב הקריטי וגם לחסם תחתון המבוסס על עומס העבודה על המשאב. לחסם תהייה תוספת מידע גדולה יותר ככל שנתקדם לרמה אחרונה של הצמתים מסוג סידור.יחס רבים:רבים – ביחס זה לכל המשאבים ידוע מהן הפעולות אשר אמורות להתבצע עליהם. בבחירה זו נידע מהו משך ביצוע של הפעולה ומהן הפעולות אשר מתבצעות בכל אחד מהמשאבים. מבחינת חסם תחתון המבוסס על אורך נתיב הקריטי ו/או עומס העבודה על המשאב, ביחס זה יש תוספת מידע הגדולה ביותר בהשוואה לשאר יחסים. |
| מורכבות היישום | היישום המורכב ביותר הוא יחס רבים: רבים בשל מורכבות הרכבת סידור אפשרי על כל משאב. |
| כמות העבודה הנדרשת עד לסיום ריצת האלגוריתם | ניתן לומר בהערכה כי ניצול טוב יותר של חסם תחתון ועץ קטן יותר, יביאו בסה"כ לפחות עבודה הנדרשת להשלמת ריצת האלגוריתם. |

לסיכום הדברים שהועלה עד כה על אפשרויות החלטה **בצומת מסוג סידור**, ניתן לראות כי קיימת עדיפות ליחס רבים:רבים, לפי ארבעת קריטריוני ההחלטה הבאים: מרחב זיכרון נדרש, כמות העבודה הנדרשת עד לקבלת פתרון ראשון, ניצול מרבי של חסם תחתון וכמות העבודה הנדרשת עד לסיום ריצת האלגוריתם. בקריטריון איכות פתרון ראשון אין הבדל באפשרויות יישום ומבחינת קריטריון מורכבות היישום יחס רבים:רבים הכי בעייתי. על מנת ליישם יחס זה, יש לנהל מבנה נתונים מורכב ושימוש בחיפוש באמצעות עץ נוסף. מסיבה זו ניתן לסכם ולומר שקיימת עדיפות להשתמש ביחס הבא מבחינת סדר עדיפויות בקריטריוני ההחלטה והוא **1:רבים**.

כזכור סדר ביצוע החלטות הוא הקצאת משאבים, סידור פעולות בהתאם להקצאה ולבסוף תזמון פעולות על גבי המשאבים בהתאם לסדר שנקבע. **בצמתי תזמון** אפשרויות החלטה של יחסים 1:1, רבים:1 ו-1:רבים יביאו למורכבות חישוב רבה יותר מאשר יחס **רבים:רבים** אשר מביא לרמה אחת של הצמתים מסוג זה ומתיר מציאת אורך הנתיב הקריטי של הפעולות המהווה בעצם פתרון לבעיה.

לסיכום הדברים על אפשרויות החלטה בכל אחד מסוגי הצמתים ניתן לראות כי קיים יתרון באפשרות יישום הבאה: **צומת הקצאה – יחס רבים:רבים**. כתוצאה מכך מתקבלת רמה אחת של הצמתים מסוג זה. **צומת סידור – יחס 1:רבים**. כתוצאה מכך מתקבלות מספר רמות של צמתים מסוג זה. מספר רמות יהיה כמספר המשאבים בבעיה (). **צומת תזמון – יחס רבים:רבים**. כתוצאה מכך מתקבלת רמה אחת של הצמתים מסוג זה.

באיור 2 ניתן לראות את המבנה הכללי של העץ.



איור 2 - מבנה של העץ באלגוריתם B&B לפתרון RSSP

**סידור הצמתים במישור ההחלטות של סדר הפעולות על המשאב:**

מאחר ובצמתים מסוג סידור מדובר על מספר רמות (כמספר המשאבים), נשאלת השאלה באיזה סדר כדאי לסדר אותם במהלך חיפוש הפתרון. בין האפשרויות סידור המשאבים תחת הקצאת משאבים נתונה נוכל לבחון אפשרויות סידור הבאות:

* שרירותי – משאבים מסודרים לפי סדר שרירותי.
* לפי עומס העבודה על המשאב – משאבים מסודרים לפי עומס העבודה מגבוה לנמוך.
* לפי מספר פעולות קריטיות – משאבים מסודרים לפי מספר פעולות קריטיות מגבוה לנמוך, כלומר משאב אשר מבצע יותר פעולות אשר נמצאות על נתיב קריטי, ימוקם יותר קרוב לשורש העץ לעומת משאב אחר אשר מבצע פחות פעולות קריטיות.
* לפי שכיחות ביצוע פעולות – משאבים מסודרים לפי שכיחות הפעולות מגבוה לנמוך, כלומר משאב המבצע יותר פעולות אשר מתבצעות גם על יותר משאבים נוספים, ימוקם יותר קרוב לשורש העץ.

בטבלה 6 מוצגים שיקולים של בחירת אפשרויות שונות לאופן סידור המשאבים תחת הקצאת משאבים נתונה לכל הפעולות ביחס לקריטריוני החלטה. לאור דיון זה, נבחר לסדר את המשאבים תוך התחשבות ב: עומס העבודה על המשאב, פעולות קריטיות המתבצעות על המשאב ושכיחות ביצוע פעולות על גבי המשאבים. בנוסף לכך, על מנת להקל על מורכבות היישום, סידור משאבים יכול להתבצע פעם אחת להקצאת משאבים נתונה. לשם כך הוגדר אינדקס למיון המשאבים לרמות העץ כדלקמן:  כאשר  ווקטור משקולות ו- ווקטור עומסי העבודה על כל המשאבים אשר שותפים למשאב (משאבים אשר מבצעים פעולות אשר מבצע משאב ). סידור זה שואף להקדים בסדר החלטות הסידור את אלה הנוגעות לפעולות הנמצאות על נתיב קריטי של הפתרון ומשאבים עמוסים ו/או מעורבים בביצוע פעולות רבות.

**טבלה 6 – אופן סידור המשאבים תחת הקצאת משאבים נתונה**

|  |  |
| --- | --- |
| קריטריון החלטה | שיקולים |
| מרחב זיכרון נדרש | כל האפשרויות דורשות מרחב זיכרון זהה. |
| כמות העבודה הנדרשת עד לקבלת פתרון ראשון | כמות העבודה הנדרשת לסידור משאבים מהנמוך לגבוהה הוא לפי סדר הבא שרירותי 🡨 לפי עומס; לפי שכיחות ביצוע פעולות 🡨 לפי מספר פעולות קריטיות. |
| איכות פתרון ראשון | ככל שנתחשב מוקדם יותר בעומס עבודה על המשאבים ובפעולות קריטיות כך נקבל מוקדם יותר פתרון אשר מתקרב לפתרון אופטימאלי. |
| ניצול מרבי של חסם תחתון | סידור משאבים לפי עומס ולפי מספר פעולות קריטיות אלו הם שני סידורים בעלי השפעה על ערכו של חסם תחתון המבוסס על אורך נתיב קריטי ועל חסם תחתון המבוסס על עומס עבודה על המשאב.  |
| מורכבות היישום | סידור משאבים לפי סדר שרירותי בעל מורכבות היישום הפשוט ביותר. סידור משאבים לפי עומס או לפי שכיחות הפעולות הם סידורים הניתנים לביצוע ברגע שידועה הקצאת משאבים לכל הפעולות. לעומת זאת סידור לפי מספר פעולות קריטיות הוא סידור אשר חייב להתעדכן ככל שמתקדמים לעבר תחתית העץ (נתיב קריטי של הפעולות משתנה בהתאם לזימון פעולות על המשאבים) ולכן זהו סידור בעל מורכבות יישום הגבוהה ביותר. |
| כמות העבודה הנדרשת עד לסיום ריצת האלגוריתם | בהתאם למה שצוין בקריטריון ניצול מרבי של חסם תחתון, בקריטריון הנוכחי יש עדיפות לסדר את המשאבים בהתאם לעומס ופעולות קריטיות. |

**אופן יישום ההחלטה:**

כל סוג של החלטה ניתן ליישם בשתי דרכים, לייצר את כל הפתרונות האפשריים בו זמנית ולבחור את המועדף, או לייצר אחד או חלק מהפתרונות בתקווה שלא נזדקק בהמשך התהליך לכל הפתרונות.

הרכבת כל האפשרויות להקצאת משאבים לכל הפעולות בעלת מורכבות אקספונציאלית החסומה ע"י. הרכבת כל הסידורים האפשריים של פעולות על המשאב בעלת מורכבות אקספונציאלית החסומה ע"י . מסיבה זו יכול להיות שכדאי כל פעם לייצר פתרון אחד של הקצאת משאבים ופתרון אחד של סידור פעולות על המשאב (גישת לעומק תחילה).

* 1. **אופן צמצום/ חסימת אפשרויות (pruning/ bounding)**

כפי שהוזכר לפני כן קיימות שתי שיטות לחסימת אפשרויות בעץ: שימוש בחסם תחתון וקיום יחס שליטה.

במחקר הנוכחי לא נמצאו יחסי שליטה טובים לצורך חסימת אפשרויות. הדוגמה הבאה מדגימה יחס שליטה אפשרי בין שתי הקצאות משאבים.

נניח מדובר על בעיה בעלת מאפיינים הבאים: , , , , , , , , , , , , , , , . בבעיה זאת מדובר על שתי הקצאות משאבים אפשריות: , . ניתן לראות כי שתי חלופות ההקצאה אינן שונות במהותן, כלומר מתקיים ביניהן יחס שליטה ולכן במידת הצורך מספיק לחקור רק אחת מהן. יחסי שליטה כאלו יכולים להתקיים ב-RSSP אך מדובר במקרים נדירים אשר לבדיקת קיומם נדרשת עבודת חישוב רבה, במהלך ריצת האלגוריתם.

לאור ממצאי העבודה של Ainbinder ואחרים (2018), חסימת אפשרויות ניתנת לביצוע באמצעות כל אחת משבע שיטות לחישוב חסם תחתון ל-RSSP, אך כדאי יותר להשתמש בחסם  מאחר והוא הוכח להיות הדוק יותר משאר החסמים.

* 1. **שיטת חיפוש (search strategy)**

בפרק 1 הוזכרו ארבע שיטות חיפוש עיקריות: לפי יוריסטיקה, לפי חסם תחתון הטוב ביותר, לפי עומק ולפי רוחב. כמו כן הוצגו יתרונות של כל אחת מהשיטות ביחס למדדי ביצוע עפ"י מחקרים תיאורטיים ו/או אמפיריים של Ibaraki (1987). במסגרת המחקר הנוכחי נציע מספר שיטות חיפוש:

* לפי עומק – בהתאם למה שתואר בתת הפרק הקודם.
* שילוב של שיטת חיפוש לפי עומק ושיטת חיפוש לפי חסם תחתון הטוב ביותר – מציאת פתרון ראשון לפי עומק ולאחר מכן תהליך חיפוש ממשיך לחקור את הצמתים בעלי חסם תחתון הנמוך ביותר עד לעצירת האלגוריתם.
* שילוב של שיטת חיפוש לפי עומק ושיטת חיפוש לפי יוריסטיקה – מציאת פתרון ראשון לפי עומק ולאחר מכן תהליך חיפוש ממשיך לחקור את הצמתים בעלי ערך יוריסטי הנמוך ביותר עד לעצירת האלגוריתם.

במסגרת המחקר נעשה מאמץ לפתח יוריסטיקה טובה (לא מטעה) לניווט בעץ אך ניסיון זה כשל ולכן שיטת חיפוש המשלבת שיטת חיפוש לפי עומק ויוריסטיקה לא תיבחן במסגרת המחקר הנוכחי. בנוסף לכך לאור ממצאים של Ainbinder ואחרים (2018) על החסמים ניתן לראות כי חסם  בעל מתאם גבוה עם המטרה ולכן לדעתנו הוא יכול לשמש לא רק כחסם אלא גם כיוריסטיקה.

בנוסף לכך מתוך שיקולים של גודל זיכרון, מורכבות היישום וכמות העבודה המושקעת עד למציאת פתרון ראשון, כל פעם יבוצע חיפוש אחרי פתרון אופטימאלי תחת הקצאת משאבים נתונה ובתום חקירתה יתבצע מעבר לחקירה של הקצאת משאבים חדשה שעוד לא נחסמה. טבלה 7 מציגה את השיקולים לבחירת שיטות חיפוש שהוצגו ביחס לקריטריוני החלטה. לאור השיקולים שהועלו בטבלה 7 על שיטות חיפוש בעץ, ניתן לראות שכדאי לשלב את שיטת החיפוש לפי עומק ושיטת חיפוש לפי חסם תחתון הטוב ביותר.

**טבלה 7 – שיטת חיפוש בעץ B&B**

|  |  |
| --- | --- |
| קריטריון החלטה | שיקולים |
| מרחב זיכרון נדרש | מרחב זיכרון מהקטן עד לגדול לפי סדר הבא: עומק, שילוב של שיטת חיפוש לפי עומק ושיטת חיפוש לפי חסם תחתון הטוב ביותר/ שילוב של שיטת חיפוש לפי עומק ושיטת חיפוש לפי יוריסטיקה. |
| כמות העבודה הנדרשת עד לקבלת פתרון ראשון | שיטת חיפוש לפי עומק מהירה יותר על פני שתי שיטות נוספות עד למציאת פתרון ראשון. |
| איכות פתרון ראשון | פתרון ראשון יהיה מקורב יותר לפתרון אופטימאלי בשיטת חיפוש לפי חסם תחתון הטוב ביותר. |
| ניצול מרבי של חסם תחתון | ערכו של חסם תחתון לא תלויה בשיטת חיפוש. |
| מורכבות היישום | אין הבדל. |
| כמות העבודה הנדרשת עד לסיום ריצת האלגוריתם | לא ניתן לקבוע מראש מאחר וקריטריון זה מושפע גם ממאפיינים נוספים כגון חסם תחתון. |

## מאפייני אלגוריתם B&B לפתרון RSSP

מטרת הפרק הנוכחי הנה בחינה של שיטות חיפוש חדשות מול שיטת חיפוש המוכרת מהספרות (Samaddar ואחרים, 1999). מסיבה זו נסכם את מה שזהה בכל האלגוריתמים ונציין את המאפיינים בהם אלגוריתמים נבדלים אחד מהשני.

מאפיינים זהים באלגוריתמים:

* אופן פירוק הבעיה – בכל האלגוריתמים ישנם שלושה סוגים של צמתים כפי שתואר לפני כן (קרי, צומת הקצאה, צומת סידור וצומת תזמון). בצומת הקצאה תתקבל החלטה על הקצאת כל המשאבים לכל הפעולות. בצומת מסוג סידור תתקבל החלטה על סידור אפשרי של כל הפעולות המתבצעות על משאב המיוצג ע"י הצומת. בצומת תזמון תתקבל החלטה על זמני ביצוע של כל הפעולות על כל המשאבים. מבחינת סדר קבלת ההחלטות, קודם כל תתקבל החלטה על הקצאת המשאבים, לאחר מכן, על סידור הפעולות תחת הקצאה שהוחלט עליה ולבסוף תתקבל החלטה על זמני ביצוע של הפעולות בהתאם לסידור שנקבע.
* אופן חסימת אפשרויות – בכל האלגוריתמים יעשה שימוש בחסם תחתון .

מאפיינים שונים באלגוריתמים:

* אופן יישום החלטות הקצאה – ייבחנו שתי דרכים, האחת - הרכבה מראש של כל אפשרויות ההקצאה, השנייה - הרכבת אפשרות הקצאת משאבים אחת (והליכה לעומק).
* סדר המשאבים בצמתים מסוג סידור – ייבחנו שתי דרכים, האחת - סידור שרירותי, השנייה - סידור לפי ערך יורד של אינדקס .
* אופן יישום החלטות סידור למשאב נתון – ייבחנו שתי דרכים, האחת - הרכבת כל הסידורים האפשריים של הפעולות על המשאב, השנייה - בחירת סידור פעולות אפשרי אחד (והליכה לעומק).
* שיטת חיפוש – יבחנו שתי שיטות חיפוש, האחת - לפי עומק, והשנייה - חיפוש המשלב לפי עומק ולפי חסם תחתון הטוב ביותר (יוסבר בהמשך).

טבלה 8 מרכזת את שילובי השיטות באלגוריתמים שביצועיהם יושוו אמפירית.

**הרכבת הקצאת משאבים לכל הפעולות:**

כזכור, הקצאת משאבים נקבעת על ידי בחירת אופן ביצוע לכל פעולה. הרכבת כל אפשרויות ההקצאה משמעותה קביעת כל השילובים האפשריים של אופני הביצוע של כל הפעולות. מאידך, הרכבת אפשרות הקצאה אחת (לפי הצורך) משמעותה קביעת שילוב אפשרי אחד לאופני הביצוע של כל הפעולות. כל אפשרות כזאת מגדירה תת-בעיה *SP* של RSSP. בנספח A ניתן למצוא את תיאור האלגוריתם לפיו מורכבת הקצאת משאבים אחת בכל פעם בהתאם לצורך.

הניתוח להלן מתבסס על תהליך החלטות הקצאה במבנה של "עץ אופנים" (הגדרה ‏1) בו בכל רמה נקבע אופן ביצוע של אחת הפעולות. מסקנת הניתוח מצביעה על שילוב אופני הביצוע המוביל לתת-הבעיה *SP* עם החסם הנמוך ביותר. ההוכחות לטענות (טענה 1, טענה 2) מופיעות בנספח B.

*הגדרה 1:*

עץ אופנים הנו פריסת אפשרויות הקצאת משאבים (בחירת אופני ביצוע לפעולות) לפי אפשרות יישום החלטת ההקצאה ביחס רבים:1 (קרי, לפעולה אחת נבחרה הקצאה על מספר משאבים).

*הגדרה 2:*

 קבוצת פעולות להן נקבע אופן ביצוע, .

*הגדרה 3:*

 תהיה צומת בעץ אופנים בו נקבעו אופני ביצוע לקבוצת פעולות .

*טענה 1:*

על מנת להגיע בבעיה  (RSSP) מצומת  לצירוף אופנים בעל נתיב קריטי מינימאלי, מבין כל צירופי האופנים האפשריים המסתעפים מ-, יש לבחור לכל פעולה  את אופן הביצוע בעל משך ביצוע מינימאלי.

מתוך טענה 1 ניתן לראות שחסמים **** שהוצעו ע"י Ainbinder ואחרים (2018) מבוססי משכי הפעולות בהתאם לבחירה של אופני ביצוע ולאילוצי הסדר בין הפעולות, מהווים חסם תחתון לערך של הפתרון בשורש של עץ האופנים או בכל צומת שלו. חשוב לציין כי שאר החסמים אשר הוצעו ע"י Ainbinder ואחרים (2018) לא מהווים חסם תחתון בעץ האופנים מאחר ומתבססים על בחירת אופן ביצוע לכל הפעולות בבעיה.

*טענה 2:*

אלגוריתם להרכבת הקצאת משאבים לכל הפעולות (נספח A) פורש את צירופי האופנים של הפעולות בסדר לא יורד של ערך החסם () שלהן (כלומר של ארכי נתיבים הקריטיים בהתאם להרכבת צירופי האופנים).

**אלגוריתם כללי למציאת פתרון אופטימאלי ל-RSSP ():**

1. הרכב הקצאת משאבים ראשונה עפ"י בחירת אופן ביצוע בעל משך ביצוע הנמוך ביותר
2. חקור את הקצאת המשאבים הנתונה באמצעות B&B
3. אם תנאי עצירה מתקיים, עבור ל-7
4. קבל הקצאת משאבים חדשה באמצעות אלגוריתם להרכבת הקצאת משאבים לכל הפעולות
5. אם תנאי עצירה מתקיים, עבור ל-7
6. עבור ל-2
7. סיים. הפתרון הטוב ביותר שנמצא הנו פתרון אופטימאלי.

תנאי עצירה: ערך הפתרון הטוב ביותר שנמצא עד כה קטן או שווה לערך החסם התחתון של הפתרון תחת הקצאת המשאבים הנתונה (המגדירה תת-בעיה *SP* ספציפית).

## השוואת האלגוריתמים מבוססי עקרון B&B

על בסיס השיקולים שהועלו לגבי אופן פירוק הבעיה ושיטות החיפוש, הוחלט להתמקד בשישה אלגוריתמים המתוארים בטבלה 8. שיטת החסימה אשר נבחרה בכל האלגוריתמים הנה שימוש בחסם  (אשר הוכח כבעל הביצועים הטובים ביותר מכל אלה שפיתחנו ונבחנו ע"י Ainbinder ואחרים ב-2018).

טבלה 8 – תיאור מאפייני האלגוריתמים מבוססי B&B

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| אלגוריתם: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| אופן יישום ההחלטה בצמתי סידור | אופן יישום ההחלטה בצמתי הקצאה | כל האפשרויות | X | X | X | X |  |  |
| אפשרות אחת |  |  |  |  | X | X |
| סדר של צמתים מסוג סידור | שרירותי | X |  |  |  |  |  |
| לפי עומס |  | X | X | X | X | X |
| אופן יישום ההחלטה בצמתי סידור | כל האפשרויות |  |  | X | X | X | X |
| אפשרות אחת | X | X |  |  |  |  |
| שיטת חיפוש | לפי עומק | X | X | X |  | X |  |
| עומק וחסם |  |  |  | X |  | X |

לצורך השוואה אמפירית של ששת האלגוריתמים, בוצעה הרצה של 105 בעיות מתוכן 16 בעיות של Samaddar ואחרים (1999) ושאר בעיות הנן בעיות אקראיות.

לפני השוואת ביצועי האלגוריתמים, כל הבעיות חולקו לחמישונים לפי סדר מורכבות עולה, כאשר מורכבות הבעיה שווה לערך החציון של משכי הריצה באלגוריתמים השונים. באיור 3 בציר אופקי של הגרף מוצגים חמישונים לפי ערך החציון של זמן ריצה כולל ובציר אנכי של הגרף ניתן לראות את הלוגריתם של ממוצע זמן ריצה כולל של כל אחד מהחמישונים. באלגוריתם 4 ו-6 היו ארבע בעיות הנכללות בחמישון האחרון ואשר לא הושג להן פתרון אופטימאלי בשל מגבלת הזיכרון של אמצעי חישוב. מסיבה זו שתי העקומות המייצגות את זמן הריצה הכולל של שני האלגוריתמים הללו, לא מגיעות לחמישון האחרון. במילים אחרות, ניתן לומר כי בחמישון האחרון אלגוריתמים 4 ו-6 מגיעים לזמן ריצה הרבה יותר גבוה משאר האלגוריתמים. איור 4 מציג את מורכבות הבעיות שנכללות בכל אחד מהחמישונים לפי ממוצע של מספר משתנים בינאריים, מספר משתנים רציפים, מספר משוואות אילוץ בניסוח של הבעיה כ-MILP וסה"כ מספר צירופי אופנים אפשריים בבעיה. ניתן לראות כי קבוצות הבעיות לפי החלוקה שבוצעה אכן מייצגות בעיות לפי מורכבות עולה (הקבוצה הראשונה הינה קבוצת בעיות בעלות מורכבות נמוכה וקבוצה חמישית הינה הקבוצה המורכבת ביותר).

איור 3 - חלוקת הבעיות לחמישונים של מורכבות, לפי חציון זמן הריצה באלגוריתמים 1 עד 6

**איור 4 - מאפייני הבעיות לפי קבוצות מורכבות**

האלגוריתמים הושוו עפ"י שלושה רבדים עיקריים:

1. כמות העבודה שהושקעה עד למציאת פתרון ראשון וטיבו של הפתרון הראשון ביחס לפתרון האופטימאלי
2. כמות העבודה שהושקעה עד למציאת פתרון אופטימאלי לבעיה
3. כמות העבודה הכוללת שהושקעה

להלן תיאור וממצאי המדדים שנלקחו בחשבון לצורך השוואת ביצועי האלגוריתמים.

* ממוצע מספר יחסי של צמתים שפורקו עד למציאת פתרון ראשון.

אופן חישוב המדד הנו , כאשר  הנו מספר צמתים שפורקו עד למציאת פתרון ראשון באמצעות אלגוריתם . טבלה 4 מציגה את הממוצע וסטית התקן של המדד אשר חושב על הבעיות בכל חמישון לפי כל אחד מהאלגוריתמים. ניתן לראות ששני אלגוריתמים אשר בממוצע דורשים הכי מעט השקעה עד למציאת פתרון ראשון לבעיה הם אלגוריתמים 5, 6 המשלבים יישום של אפשרות אחת בשלב ההקצאה, סידור משאבים לפי עומס העבודה על המשאב והמשאבים השותפים (אינדקס *Hr*) ויישום של כל האפשרויות בצמתי סידור. שני אלגוריתמים המשקיעים הכי הרבה עבודה עד למציאת פתרון ראשון הם אלגוריתמים 3, 4 המיישמים את כל האפשרויות בצומת הקצאה, סידור משאבים לפי *Hr* ויישום כל האפשרויות בצמתי סידור. שני האלגוריתמים הנותרים 1, 2 המשקיעים עבודה ברמה בינונית עד למציאת פתרון ראשון לבעיה, נבדלים אחד מהשני בסדר המשאבים.

**טבלה 9 – ממוצע מספר צמתים יחסי שפורקו עד למציאת פתרון ראשון באלגוריתם B&B**

|  |  |
| --- | --- |
| קבוצת בעיות מס' | האלגוריתם |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן |
| 1 | **0.78** | 0.25 | **0.80** | 0.25 | **0.93** | 0.18 | **0.93** | 0.18 | **0.52** | 0.40 | **0.52** | 0.40 |
| 2 | **0.77** | 0.22 | **0.78** | 0.22 | **0.82** | 0.24 | **0.82** | 0.24 | **0.51** | 0.42 | **0.51** | 0.42 |
| 3 | **0.72** | 0.33 | **0.72** | 0.33 | **0.94** | 0.16 | **0.94** | 0.16 | **0.45** | 0.41 | **0.45** | 0.41 |
| 4 | **0.90** | 0.18 | **0.90** | 0.18 | **0.93** | 0.18 | **0.93** | 0.18 | **0.20** | 0.35 | **0.20** | 0.35 |
| 5 | **0.85** | 0.35 | **0.85** | 0.35 | **1.00** | 0.00 | **1.00** | 0.00 | **0.16** | 0.35 | **0.16** | 0.35 |

* ממוצע זמן ריצה יחסי עד למציאת פתרון ראשון.

אופן חישוב המדד הנו , כאשר  הנו זמן ריצה עד למציאת פתרון ראשון באמצעות אלגוריתם . בטבלה 10 ניתן לראות את הממוצע וסטית התקן של המדד אשר חושב על הבעיות בכל חמישון לפי כל אחד מהאלגוריתמים. ניתן לראות כי האלגוריתמים המהירים ביותר הם 5, 6, ובהתאם נשמר גם סדר הביצוע של האלגוריתמים האחרים - בהלימה עם מספר הצמתים שפורקו.

**טבלה 10 – ממוצע זמן ריצה יחסי עד למציאת פתרון ראשון באלגוריתם B&B**

|  |  |
| --- | --- |
| קבוצת בעיות מס' | האלגוריתם |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן |
| 1 | **0.85** | 0.33 | **0.89** | 0.28 | **0.98** | 0.11 | **0.96** | 0.20 | **0.78** | 0.40 | **0.78** | 0.40 |
| 2 | **0.79** | 0.27 | **0.81** | 0.29 | **0.85** | 0.26 | **0.98** | 0.07 | **0.50** | 0.49 | **0.50** | 0.49 |
| 3 | **0.61** | 0.30 | **0.56** | 0.30 | **0.69** | 0.19 | **0.98** | 0.08 | **0.29** | 0.39 | **0.27** | 0.38 |
| 4 | **0.77** | 0.18 | **0.71** | 0.17 | **0.79** | 0.12 | **0.96** | 0.09 | **0.04** | 0.07 | **0.04** | 0.08 |
| 5 | **0.59** | 0.33 | **0.74** | 0.35 | **0.92** | 0.11 | **0.78** | 0.14 | **0.12** | 0.27 | **0.16** | 0.35 |

* ממוצע ערך יחסי של פתרון ראשון מערך פתרון האופטימאלי.

אופן חישוב המדד הנו , כאשר  הנו ערך פתרון ראשון שנמצא לבעיה  ו-  הנו ערך פתרון אופטימאלי לבעיה. טבלה 11 מציגה את הממוצע וסטית התקן של המדד אשר חושב על הבעיות בכל חמישון לפי כל אחד מהאלגוריתמים. ניתן לראות כי גם כאן שני האלגוריתמים בעלי הביצועים הטובים ביותר הם אלגוריתמים 5, 6. ובהתאם נשמר גם סדר הביצוע של האלגוריתמים האחרים כבשני המדדים הקודמים.

**טבלה 11 – ממוצע ערך יחסי של פתרון ראשון שנמצא באלגוריתם B&B מפתרון אופטימאלי**

|  |  |
| --- | --- |
| קבוצת בעיות מס' | האלגוריתם |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן |
| 1 | **1.09** | 0.16 | **1.09** | 0.16 | **1.04** | 0.06 | **1.04** | 0.06 | **1.04** | 0.06 | **1.04** | 0.06 |
| 2 | **1.27** | 0.23 | **1.27** | 0.23 | **1.22** | 0.24 | **1.22** | 0.24 | **1.05** | 0.09 | **1.05** | 0.09 |
| 3 | **1.35** | 0.28 | **1.35** | 0.28 | **1.13** | 0.12 | **1.13** | 0.12 | **1.06** | 0.10 | **1.06** | 0.10 |
| 4 | **1.42** | 0.33 | **1.42** | 0.33 | **1.19** | 0.23 | **1.19** | 0.23 | **1.08** | 0.14 | **1.08** | 0.14 |
| 5 | **1.39** | 0.37 | **1.39** | 0.37 | **1.16** | 0.14 | **1.16** | 0.14 | **1.25** | 0.46 | **1.25** | 0.46 |

* ממוצע מספר יחסי של הצמתים שפורקו עד למציאת הפתרון האופטימאלי.

אופן חישוב המדד הנו , כאשר  הנו מספר צמתים שפורקו עד למציאת פתרון אופטימאלי באמצעות אלגוריתם . טבלה 12 מציגה את הממוצע וסטית תקן של המדד אשר חושב על הבעיות בכל חמישון לפי כל אחד מהאלגוריתמים. לפי התוצאות האלגוריתם היעיל ביותר במדד זה הנו אלגוריתם 5 אשר מיישם אפשרות אחת בצמתי הקצאה, סידור משאבים לפי עומס העבודה על המשאב והמשאבים השותפים, יישום כל האפשרויות בצמתי סידור וחיפוש לפי עומק. אלגוריתם 6 הביא לתוצאה מעט פחות טובה השונה מאלגוריתם 5 בשיטת החיפוש. האלגוריתם שהשקיע הכי הרבה עבודה מבין כל האלגוריתמים הנו אלגוריתם 4 המיישם את כל האפשרויות בצמתי הקצאה, את כל האפשרויות בצמתי הסידור ושיטת חיפוש לעומק ועם חסם תחתון. בין האלגוריתמים הנותרים לא נראה הבדל משמעותי בתוצאות הבינוניות שהשיגו.

**טבלה 12 – ממוצע מספר יחסי של צמתים שפורקו עד למציאת פתרון אופטימאלי באלגוריתם B&B**

|  |  |
| --- | --- |
| קבוצת בעיות מס' | האלגוריתם |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן |
| 1 | **0.64** | 0.36 | **0.65** | 0.36 | **0.69** | 0.35 | **0.78** | 0.33 | **0.36** | 0.34 | **0.59** | 0.44 |
| 2 | **0.89** | 0.24 | **0.88** | 0.24 | **0.85** | 0.27 | **0.95** | 0.11 | **0.13** | 0.14 | **0.23** | 0.34 |
| 3 | **0.69** | 0.36 | **0.69** | 0.36 | **0.63** | 0.39 | **0.97** | 0.12 | **0.15** | 0.23 | **0.37** | 0.43 |
| 4 | **0.87** | 0.25 | **0.87** | 0.25 | **0.85** | 0.25 | **0.93** | 0.21 | **0.10** | 0.16 | **0.28** | 0.37 |
| 5 | **0.60** | 0.40 | **0.60** | 0.39 | **0.60** | 0.40 | **-** | - | **0.23** | 0.32 | **-** | - |

* ממוצע זמן ריצה יחסי עד למציאת פתרון אופטימאלי.

אופן חישוב המדד הנו , כאשר  הנו זמן ריצה עד למציאת פתרון אופטימאלי באמצעות אלגוריתם . טבלה 13 מציגה את הממוצע וסטית התקן של המדד אשר חושב על הבעיות בכל חמישון לפי כל אחד מהאלגוריתמים. לפי התוצאות האלגוריתם היעיל ביותר במדד זה הנו אלגוריתם 5, ובהתאם לכך גם ביצועי שאר האלגוריתמים בהלימה עם תוצאות המדד הקודם (טבלה 6).

**טבלה 13 – ממוצע זמן ריצה יחסי עד למציאת פתרון אופטימאלי באלגוריתם B&B**

|  |  |
| --- | --- |
| קבוצת בעיות מס' | האלגוריתם |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן |
| 1 | **0.76** | 0.41 | **0.71** | 0.43 | **0.77** | 0.39 | **0.81** | 0.37 | **0.61** | 0.47 | **0.74** | 0.42 |
| 2 | **0.66** | 0.31 | **0.61** | 0.34 | **0.66** | 0.35 | **0.90** | 0.27 | **0.16** | 0.30 | **0.27** | 0.42 |
| 3 | **0.52** | 0.24 | **0.43** | 0.25 | **0.43** | 0.28 | **0.96** | 0.14 | **0.12** | 0.22 | **0.33** | 0.44 |
| 4 | **0.71** | 0.24 | **0.65** | 0.22 | **0.69** | 0.22 | **0.90** | 0.21 | **0.06** | 0.12 | **0.24** | 0.37 |
| 5 | **0.47** | 0.35 | **0.52** | 0.39 | **0.49** | 0.36 | **0.76** | - | **0.16** | 0.24 | **0.49** | - |

* ממוצע מספר יחסי כולל של צמתים שפורקו.

אופן חישוב המדד הנו , כאשר  הנו מספר צמתים כולל שפורקו באמצעות אלגוריתם . טבלה 14 מציגה את הממוצע וסטית תקן של המדד אשר חושב על הבעיות בכל חמישון לפי כל אחד מהאלגוריתמים. גם תוצאות מדד זה בהלימה עם שני המדדים הקודמים (טבלה 6).

**טבלה 14 – ממוצע מספר יחסי כולל של צמתים שפורקו באלגוריתם B&B**

|  |  |
| --- | --- |
| קבוצת בעיות מס' | האלגוריתם |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן |
| 1 | **0.54** | 0.31 | **0.55** | 0.31 | **0.54** | 0.30 | **0.85** | 0.24 | **0.30** | 0.18 | **0.77** | 0.29 |
| 2 | **0.75** | 0.31 | **0.74** | 0.31 | **0.72** | 0.33 | **0.93** | 0.21 | **0.10** | 0.12 | **0.33** | 0.37 |
| 3 | **0.63** | 0.36 | **0.63** | 0.36 | **0.61** | 0.37 | **0.90** | 0.22 | **0.22** | 0.33 | **0.55** | 0.42 |
| 4 | **0.72** | 0.39 | **0.72** | 0.38 | **0.69** | 0.39 | **0.96** | 0.14 | **0.05** | 0.08 | **0.35** | 0.43 |
| 5 | **0.57** | 0.42 | **0.57** | 0.41 | **0.62** | 0.43 | **-** | - | **0.32** | 0.41 | **-** | - |

* ממוצע זמן ריצה יחסי כולל.

אופן חישוב המדד הנו , כאשר  הנו זמן ריצה כולל באמצעות אלגוריתם . טבלה 15 מציגה את הממוצע וסטית תקן של המדד אשר חושב על הבעיות בכל חמישון לפי כל אחד מהאלגוריתמים. גם תוצאות אלה בהלימה עם שלושת המדדים האחרונים ואלגוריתם 5 בממוצע בעל ביצועים משמעותית טובים יותר ובאופן מובהק בכל אחד מהחמישונים.

**טבלה 15 – ממוצע זמן ריצה יחסי כולל באלגוריתם B&B**

|  |  |
| --- | --- |
| קבוצת בעיות מס' | האלגוריתם |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן | **ממוצע** | סטית תקן |
| 1 | **0.60** | 0.45 | **0.57** | 0.44 | **0.57** | 0.44 | **0.66** | 0.43 | **0.48** | 0.46 | **0.80** | 0.37 |
| 2 | **0.52** | 0.27 | **0.50** | 0.26 | **0.57** | 0.33 | **0.89** | 0.28 | **0.06** | 0.12 | **0.24** | 0.36 |
| 3 | **0.50** | 0.26 | **0.42** | 0.21 | **0.42** | 0.24 | **0.89** | 0.23 | **0.17** | 0.27 | **0.50** | 0.41 |
| 4 | **0.55** | 0.29 | **0.51** | 0.26 | **0.56** | 0.33 | **0.92** | 0.14 | **0.05** | 0.09 | **0.34** | 0.44 |
| 5 | **0.42** | 0.34 | **0.47** | 0.39 | **0.48** | 0.38 | **-** | - | **0.23** | 0.32 | **-** | - |

מבחינה תיאורטית האלגוריתמים נבדלים אחד מהשני רק באופן יישום ההחלטה בצמתי ההקצאה. המורכבות התיאורטית של חקירת בעיה תחת הקצאת משאבים נתונה זהה בכל האלגוריתמים וחסומה ע"י . המורכבות התיאורטית של הרכבת כל הקצאות משאבים אפשריות חסומה ע"י . והמורכבות התיאורטית של הרכבת הקצאת משאבים לפי הצורך חסומה ע"י . במילים אחרות, אלגוריתמים 5 ו-6 מבחינה תיאורטית בעלי סיבוכיות חישוב גדולה יותר משאר האלגוריתמים אך מבחינה אמפירית אלגוריתם 5 הראה ביצועים מהירים יותר משאר האלגוריתמים.

## דיון ומסקנות

פרק 2 עסק בדיון על אפשרויות יישום שונות של עקרונות B&B במסגרת אלגוריתם למציאת פתרון אופטימאלי אחד ל-RSSP. על בסיס מיפוי והערכת החלופות השונות בנושא זה הוצגו השילובים אשר נבחרו ליישום ולהשוואה. לסיכום הפרק בוצעה השוואה תיאורטית ואמפירית בין האלגוריתם הקיים בספרות לבין האלגוריתמים החדשים שעוצבו בפרק זה.

השוואת הביצועים הממוצעים לכל חמשת החמישונים לכל אלגוריתם ולכל מדד, המרוכזת בטבלה 16 להלן, התמקדה בשלושה היבטים: (1) כמות העבודה והזמן עד מציאת פתרון ראשון ומרחקו מהפתרון האופטימאלי, (2) כמות העבודה והזמן עד מציאת פתרון אופטימאלי, (3) כמות העבודה והזמן עד סיום עבודת האלגוריתם.

**טבלה 16 – מאפיינים ומדדי ביצוע יחסיים בממוצע, של האלגוריתמים מבוססי B&B**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| אלגוריתם: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| אופן יישום ההחלטה בצמתי סידור | אופן יישום ההחלטה בצמתי הקצאה | כל האפשרויות | X | X | X | X |  |  |
| אפשרות אחת |  |  |  |  | X | X |
| סדר של צמתים מסוג סידור | שרירותי | X |  |  |  |  |  |
| לפי עומס |  | X | X | X | X | X |
| אופן יישום ההחלטה בצמתי סידור | כל האפשרויות |  |  | X | X | X | X |
| אפשרות אחת | X | X |  |  |  |  |
| שיטת חיפוש | לפי עומק | X | X | X |  | X |  |
| עומק וחסם |  |  |  | X |  | X |
| עד פתרון ראשון | צמתים שפורק | 0.80 | 0.81 | 0.92 | 0.92 | **0.37** | **0.37** |
| משך ריצה | 0.72 | 0.74 | 0.85 | 0.93 | **0.35** | **0.35** |
| יחס לאופטימום | 1.30 | 1.30 | 1.15 | 1.15 | **1.09** | **1.09** |
| עד פתרון אופטימאלי | צמתים שפורקו | 0.74 | 0.74 | 0.73 | 0.89 | **0.19** | 0.38 |
| משך ריצה | 0.62 | 0.59 | 0.61 | 0.87 | **0.22** | 0.42 |
| עד סיום העבודה | צמתים שפורקו | 0.64 | 0.64 | 0.64 | 0.91\* | **0.20** | 0.50\* |
| משך ריצה | 0.52 | 0.49 | 0.52 | 0.84\* | **0.20** | 0.47\* |

\*- ממוצע חושב על סמך ארבעה חמישונים מתוך חמישה

נמצא כי אלגוריתמים 5, 6 המשלבים יישום של אפשרות אחת בשלב ההקצאה, סידור משאבים לפי עומס העבודה על המשאב והמשאבים השותפים ויישום של כל האפשרויות בצמתי סידור, הציגו ביצועים עדיפים בכל המדדים ובכל קבוצות המורכבות של הבעיות שנפתרו. במדדי כמות העבודה ומשך הביצוע עד סיום החיפוש, אלגוריתם 5 הגיע לביצועים טובים משמעותית מאלגוריתם 6. ההבדל בין שני האלגוריתמים הוא בשיטת החיפוש, אלגוריתם 5 הולך לעומק ואילו 6 משלב בין הליכה לעומק וערך החסם. מאחר ועד למציאת פתרון ראשון לבעיה שתי שיטות החיפוש אשר נבחנו לא נבדלות אחת מהשנייה, לכן ביצועיהם דומים לגבי השגת פתרון ראשון.

ההבדל בין שני האלגוריתמים המהירים ביותר עד למציאת פתרון ראשון (5, 6) לבין שני האלגוריתמים האיטיים ביותר (3, 4) הוא אופן יישום ההחלטה בצומת הקצאה. ניתן לראות שכאשר מיישמים את כל האפשרויות בצומת הקצאה כצפוי זה גוזל יותר זמן עד למציאת פתרון ראשון מאשר יישום אפשרות אחת. וזאת בגלל שכל  מכיל לפחות פתרון אחד אפשרי לבעיה, ואלגוריתם אשר מיישם אפשרות אחת בצמתי הקצאה ישקיע פחות עבודה עד למציאת פתרון ראשון ולכן ימצא אותו מהר יותר.

מבחינת מרחקו של הפתרון הראשון מהפתרון האופטימאלי, שני האלגוריתמים הטובים ביותר (5, 6) הם גם האלגוריתמים המהירים ביותר עד למציאת פתרון ראשון. אלגוריתמים אשר הניבו את המרחק הגדול ביותר בין הפתרון הראשון לפתרון האופטימאלי (1, 2) מיישמים את כל האפשרויות בצמתי הקצאה ואפשרות אחת בצמתי סידור. ההבדל היחיד ביניהם באופן סידור המשאבים לא הניב פער משמעותי בביצועיהם. אלגוריתמים אשר מיישמים את כל האפשרויות בצמתי הקצאה יחקרו את  באותו סדר, לפיכך הבדל בתוצאות המדד בין אלגוריתמים אלו נובע מאופן יישום ההחלטה בצמתי סידור. באלגוריתמים אשר מיישמים כל האפשרויות בצמתי סידור (3-6), גדל סיכוי לכך שימצא פתרון יותר קרוב לפתרון האופטימאלי מאחר וכל פעם נבחר ענף בעל חסם תחתון הטוב ביותר. לעומת האלגוריתמים אשר מיישמים אפשרות אחת בצמתי סידור (1, 2) כאשר אפשרות זו נבחרת באופן אקראי מבין כל האפשרויות שעוד לא נחקרו. ההבדל בתוצאות המדד בין האלגוריתמים אשר מיישמים כל האפשרויות בצמתי הקצאה לבין האלגוריתמים אשר מיישמים אפשרות אחת בצמתי הקצאה נובע מכך שבבעיה יכולים להיות מספר  בעלי חסם תחתון מינימאלי. דבר זה יביא לכך שסדר חקירה של  באלגוריתמים אלו יהיה שונה.

ברובד השני בו נבחנה כמות העבודה המושקעת עד למציאת פתרון אופטימאלי לבעיה ומהירות העבודה ע"י כל אחד מהאלגוריתמים, ניתן לראות כי התקבלו תוצאות מאוד קרובות מבחינת כמות העבודה המושקעת ומבחינת מהירות הריצה. לפי התוצאות האלגוריתמים הטובים ביותר הם שני אלגוריתמים אשר מיישמים אפשרות אחת בצמתי ההקצאה (5, 6). האלגוריתם היעיל ביותר ברובד זה הנו אלגוריתם אשר מיישם אפשרות אחת בצמתי הקצאה, סידור משאבים לפי עומס העבודה על המשאב והמשאבים השותפים, יישום כל האפשרויות בצמתי סידור וחיפוש לפי עומק (5). המסקנה המתקבלת מתוצאות אלו הנה כי אופן יישום כל האפשרויות בצמתי הקצאה לא כדאית ובזבזנית וזה למרות הסיבוכיות התיאורטית של השיטה.

ברובד האחרון, בו נבחנה סה"כ כמות העבודה המושקעת עד לסיום ריצת האלגוריתם (ומהירות העבודה), ניתן לראות שהאלגוריתם הטוב ביותר הנו האלגוריתם שהראה ביצועים הטובים ביותר ברבדים הקודמים והוא אלגוריתם 5. אלגוריתמים אשר מיישמים שיטת חיפוש לפי עומק וחסם תחתון (4, 6) אינם ברי השוואה מאחר ובקבוצת בעיות המורכבות ביותר לא הצליחו לסיים את ריצת האלגוריתם בגלל מגבלת הזיכרון.

אלגוריתם אשר הביא לביצועים הטובים ביותר בכל הרבדים הנו אלגוריתם אשר מיישם אפשרות אחת בצמתי הקצאה, סדר צמתים מסוג סידור לפי עומס העבודה על המשאב והמשאבים השותפים, יישום כל האפשרויות בצמתי סידור ושיטת חיפוש לפי עומק (5).

**נספחים**

## נספח A – אלגוריתם להרכבת הקצאת משאבים לכל הפעולות לפי צורך

**אלגוריתם להרכבת הקצאת משאבים לכל הפעולות ():**

OperList – רשימת פעולות עם אופן ביצוע בעל משך ביצוע מינימאלי לכל אחת

Node, PreNode – צומת: רשימת פעולות עם אופן ביצוע שנבחר, עומק של הצומת וערך חסם תחתון של הצומת

NodeList – רשימת צמתים שטרם נבחנו

SPList – רשימת SP שנחקרו

ObjFunT – ערכו של הפתרון הטוב ביותר שנמצא ע"י B&B

1. הרכב OperList
2. הרכב Node התחלתי על סמך OperList 🡨 NodeList
3. כל עוד NodeList לא ריק:
	1. הוצא צומת מראש NodeList 🡨 Node
	2. חשב חסם תחתון של ה-Node
	3. אם ערכו של חסם תחתון של Node נמוך מ-ObjFunT או ObjFunT שווה לאפס אזי
		* הרכב SP על סמך אופני ביצוע של ה-Node
		* אם SP לא נחקר עדיין, אזי שלח SP לפתרון באמצעות B&B
	4. Node 🡨 PreNode
		* מחק Node מ-NodeList והרכב Node חדש:
			1. מצא את הפעולה החל מעומק של צומת PreNode עם יותר מאופן ביצוע אחד
			2. לכל אופן ביצוע של הפעולה, הרכב Node חדש
			3. חשב חסם תחתון ל-Node
			4. הוסף Node ל-NodeList
4. מיין NodeList בסדר עולה של חסם תחתון

## נספח B – טענות והוכחות לעץ אופנים

**טענה 1:** על מנת להגיע בבעיה  (RSSP) מצומת  לצירוף אופנים בעל נתיב קריטי מינימאלי, מבין כל צירופי האופנים האפשריים המסתעפים מ-, יש לבחור לכל פעולה  את אופן ביצוע בעל משך ביצוע מינימאלי.

**הוכחה 1:** נבנה בעיה חדשה  שוות ערך ל-, אשר בה לכל  יש אופן ביצוע אחד בלבד והוא זה שנקבע בעץ אופנים של  מהשורש ועד. מובן מאליו שקבוצת צירופי אופנים של בעיה  זהה לקבוצת צירופי אופנים הנפרשת מ- בבעיה . היות שב- לכל  יש אופן ביצוע יחיד, אזי הוא גם המינימאלי של . לכן, בחירת אופן ביצוע מינימאלי של כל  בבעיה  תוביל לאותו צירוף אופנים כמו בחירת אופן ביצוע מינימאלי ב-עבור  בבעיה . והרי לפי טענה 22-4 כך מתקבל ב- צירוף אופנים עם נתיב קריטי מינימאלי ולכן בהכרח גם מ- בבעיה  מתקבל באותה הדרך צירוף אופנים עם נתיב קריטי מינימאלי.

**טענה 2:** אלגוריתם להרכבת הקצאת משאבים לכל הפעולות () פורש את צירופי האופנים של הפעולות בסדר לא יורד של ערך החסם () שלהן (כלומר של ארכי נתיבים הקריטיים של צירופי האופנים).

**הוכחה 2:** בכל שלב בתהליך עבודת האלגוריתם , יש קבוצה של צמתים (כאשרהנו צומת טיפוסי) שעבורן חושב חסם. לפי הגדרת החסם הוא שווה לאורך הנתיב הקריטי המינימאלי של צירוף אופנים כלשהו הנפרש מ-. אם בוחרים לפרוש מ- אזי אלגוריתם  יוביל תחילה לצירוף אופנים בעל חסם זהה לערכו של החסם ב-. היות שבתהליך הירידה בעץ אופנים, חסם לא יכול לרדת והיות שנבחר  בעל חסם מינימאלי אזי צירוף אופנים אליו נגיע יהיה עם החסם המינימאלי מאלו שעדיין לא נפרשו.