**Introduction**

Integro-differential equation appeared very naturally in various application (see for example [9,10,17,18,25]) that explains interest in the theory of these equations (see for example [2,3]) such systems are found in models for many mechanical systems.

Consider the non-linear system of integro-differential equation:

Where

is n-dimensional vector

constant matrices

is symmetric positive- definite matrices

Let's us define the matrices and as

Where are symmetric and are skew symmetric matrices. We will use a terminology common in mechanics, describing a classification of forces acting in the system:

1. Potential force -
2. Dissipative force -
3. Gyroscopic force -
4. Bounded damping forces –
5. Non-linear force

Under a lack of the non-linear force , the stability and oscillation of the system (1) are well studies. The direct Lyapunov method has been usefully employed for investigation stability of ODE system, when the linear approximation is non critical.

Насчет нелинейных сил есть следующий результат

**Theorem**

Let the system

Where

are vector-polynomials of degree in .

Be non-resonant, i.e. For any integer-valued vector

.

The zero solution of (0.1a) is Birkhoff stable (stable in any finite nonlinear approximation)

If only potential and non-linear forces present in (1) it is reducible to

Where

The spectrum of linear approximation has n couple of pure imaginary eigenvalues. Такая система существенно используется в теории нелинейных колебаний и в ней реализуется критический случай устойчивости.

In this paper we want investigate stability integro-differential system with non-linear force когда весь спектр или его часть линейного приближения находиться на мнимой оси.

First, we need reduce the integro-differential system to the corresponding system of ODE. Это можно найти в первой части работы. The idea of a reduction to system of ordinary differential equations in the study of stability was presented in [5]. Во второй части статьи будет представлен метод и даны определенья относящие к методу приведения нелинейных систем как можно болею простому виду этот способ будем называть нормализацией, а вид системы после этого способа как систему, приведенную к нормальной форме или просто н.ф.

В 3 части статьи будет найдено условие стабильности/не стабильности нулевого решения для системы, приведенной к нормальной форме.

После этого в 4 части этой работы будет показано как можно использовать интегральную добавку как управлением стабильности, это значит, что если решение нелинейный осциллятор нестабильное, то возможен выбор коэффициентов у интегральной добавки которое позволит сделать решение стабильным или наоборот.

**Part 1 -Reduction method**

Идея и развитие метода сведения для intergo-differential equation была описана в работах Domoshnitsky, Goltser[5,6 ].

We will present how it will be possible reduce system of integro- differential equations to system of ODE.

Let us consider a system of integro-differential equation:

Let assume that

Then the system (1.1) can be written in the form

If the kernel is a square integrable function, then in a Hilbert space it can be represent in the form :

Where

are matrices continuous on besides, we assume that are reversible matrices.we can write in the following form

And assume that

Let denote

Where in the form (1.4)

Let us introduce new variable

Where

,

Тогда систему (6) можно привести к системе ODE

Where

Ставиться вопрос при каких условиях можно получит матрицу с постоянными коэффициентами, найдем достаточные и необходимые условия для того чтобы матрицу можно было привести к матрице с постоянными коэффициентами.

Пусть – Ф.С.Р. и допусти что можно записать в следующем виде

Where

– Ляпунова матрица

– постоянная матрица

Подставим (1.5) в систему

и получим

**Теорема**

Система уравнений

Приводима к системе с постоянными коэффициентами

если

Это условие является необходимое и достаточное если воспользоваться результатам Еругина о приводимых систем.

**Теорема**[Еругина]

Линейная дифференциальная система

Приводима тогда и только тогда когда некоторая ее фундаментальная матрица может быть представлена в виде матрицы Ляпунова , умноженной на экспоненциал произведения независимой переменной на постоянную матрицу т.е.

Рассмотрим теперь несколько случаев

(а) is Cauchy, тогда обозначим

so is Cauchy function of equation:

Так как функция Коши она обладать следующими свойствами

Где

является порядком линейного дифференциального оператора который зависит от структуры .

Thus, from system (1.1) We derived the following 2n dimension system of ODE

What to do if is not Cauchy function. Для этого рассмотрим следующий случай

(б) As know Leontyef [], a rather broad class of functions allows an expansion in the form of a generalized Dirichlet's series. Let the functions have the following representation :

𝑤e examine the systems who kernel is difference.

Assume that is analytical function and can be written in the form

Then can be developed to a series (1.6) of the exponents (see, Leontieff)

From (1.6) can be learned

1. There is an option for countable system of ODEs.
2. Each exponent is a Cauchy function of some ODE.
3. There equations are different depend on whether is real or complex.

Есть и другая возможность это разложить в ряд Фурье например следующего вида

Можно заменить

И получит нужное разложение.

(в) Periodic case.

Assume that is an - periodic matrix. From the equation

Using Floquet's theory, we come to the conclusion that in case the kernel contains the matrix

Where is - periodic with respect to .

Тогда используя теорему Флоке как частый случай теоремы о приводимости системы может быт приведённая к системе с постоянным коэффициентам.

в этой работе мы хотим использовать ядро, которое имеет периодическое представление.

Example

В качестве первого примера рассмотрим применение метода редукции к изучению нелинейной осциллятора с нелинейной силой представленной в виде интеграла.

Let's consider system (1) where , ,

So a system will be looks like this

И нетрудно видеть, что Оператор имеет вид

и порядок оператора 2.

After using reduction method, the system looks this

**Part 2 -Normal Form**

Представим вкратце идею о приведение системы к нормальной форме, для этого воспользуемся терминологий которую можно найти у Бибикова

Consider two formal system of ordinary differential equations

And

Where

are formal power series

Definition

We say that systems (2.1) and (2.2) are formally equivalent if there exist a change of variables

Where

is a formal power series, which reduces (2.1) to (2.2)

Let be the vector whose co-coordinates are eigenvalues of matrix .

Theorem

If

Then system (2.1) is formally equivalent to any system (2.2) and in (2.3) is uniquely determined.

We seek the simplest form of such a system, it is convenient to assume that is a Jordan canonical matrix. This can be achieved by means of linear –singular changes of variables.

So we consider a system:

Definition

Considering system (2.5) we say that coefficients of any power series corresponding to pair satisfying

Are resonant and the corresponding term is called a resonant term. On the other hand, If

Hold, we say that coefficient and corresponding term are non-resonant. equation (2.6) is called a resonance equation.

Definition

System (2.5) where all non-resonant term is equal to zero is called a normal form (NF).

Как пример нахождения нормальной формы рассмотрим систему нелинейных осцилляторов где, например, первый осциллятор возмущен с помощью силы представленного с помощью интеграла:

Используя метод сведения, описанного выше получаем следующую систему уравнений

Сделаем следующую замену

Тогда систему (2.8) в матричном виде можно будет записать в следующем виде:

Где

Сделаем замену переменных так чтобы привести матрицу к диагональному виду,

Подставим эту замену в (2.9) и получим

Умножим слева последние уравнение на и получим

После введения новых обозначений получим

где

новая нелинейность

Сделаем подстановку

И после подстановки хотим получить

Подставим (2.11) в (2.10) и получаем

Используем выражение (2.12)

После упрощения последнего выражения, получаем

Где

получается после подстановки ряда в ряд. Уравнение (2.13) называется homological equation.

Сейчас нужно исследовать когда уравнение (2.13 ) имеет решение для .

Рассмотрим уравнение и уравнение для нахождения коэффициентов у членов формы порядка

И получаем

Последние условие поможет нам найти все резонансные значения вектора .результат который мы получили можно сформулировать в следующее теорему.

**Теорема**

Система уравнений

С помощью подстановки

Приводиться к виду

Где

- имеет только резонансные члены, которые можно найти по формуле

Example – normal form

Воспользуемся условие (2.8) в системе с двумя парами мнимых собственных значений для того чтобы найти резонансные члены, которые останутся после метода нормализации

Тогда первые нелинейный член будет и

Тогда первые нелинейный член будет и

Как мы видели выше, члены второго порядка при условии отсутствия внутреннего резонанса не влияют на структуру нормальной формы то можно выбрать их равными нулю. Тогда нелинейности можно выбрать следующем образом

Let's start the normalization after reduction integro-differential equation to system of ODE, so consider the next system equation

Произведем замену переменных (2.15)

И получим следующую систему ODE

Последнею систему можно записать в следующем виде

В более короткой записи последнею систему можно записать так

Собственные значения матрицы будут

After linear transform of the linear part system (2.16 ) to diagonal form using linear transform , , where transform matrix and its inverse transfoem have the form :

Подставим эту замену в (2.16) и получим

Умножим слева последние уравнение на и получим

После видения новых обозначений получим

где

новая нелинейность, полученная после подстановки ряда в ряд

Сделаем подстановку близкую к тождественной

И после подстановки хотим получить

Коэффициенты, которые нужно найти в нормальной форме будут:

Мы выпишем только конечный результат для коэффициентов нормальной формы

Нормальная форма до 3 порядка имеет следующею структуру

**Теорема**

Следующая система уравнений

Приводима после нормализации к виду

а коэффициенты нормальной формы найдены в равенстве (2.17)

**Part 3 - Исследование на устойчивость нулевого решение уравнения ( )**

Система (2.18) рассматривалась в работах Ляпунова, Малкина, Веретенников, Молчанов, Гольцера. Мы используем часть результатов, полученных в этих работах что бы изучить устойчивость нулевого решения этой системы.

Рассмотрим следующую систему

Сделаем подстановку

И получим

Приравняем действительные и мнимые части получаем

Или можно записать так

Ответ на устойчивость решения последней системы может дать следующая теорема

**Theorem** [Goltser ]

1. For asymptotic stability of the solution of the system

Regardless of the members , it is necessary and sufficient that , and besides one the following two conditions should be fulfilled :

1. If the solution for the system ( ) is asymptotically stable, regardless of the members , then for the system ( ) there exist Lyapunov function , , with the sign-definite derivative, by virtue of the system ( ).

Используя последнею теорему к нашему примеру получаем

Или

Для того чтобы нулевое решение было а.у. должны выполняться следующие условия

или

Анализируя условия ( ) получаем

**Теорема**

Для того чтобы нулевое решение системы

Было а.у. должно выполняться следующие неравенства

замечание

Последние неравенство дает условие на коэффициент так чтобы решение уравнение с интегральной добавкой было устойчивым, но это означает что а при таком условие решение уравнения без интегральной добавки будет устойчивым

**Part 4 - использование интегральной добавки как управление стабильности нелинейного осциллятора.**

Пусть дано следующие уравнение

Так что и нулевое решение не устойчиво.

С помощью интегральной добавки следующего вида

Хотим добиться устойчивости нулевого решения нового уравнения

После использования принципа сведения получаем следующею систему уравнений

Сделаем замену координат и получим следующие систему равнений

Структура нормальной формы будет той же самой, и мы как раньше выпишем только конечные коэффициенты нормальной формы.

Где

Сделаем замену координат и получим следующею систему

Используя теорему () нужно проверить следующие неравенства

Для удобства введем новое обозначение

Тогда мы получаем

Последние неравенство можно заменить следующем неравенством

В каждом неравенстве найдем выражение для

Допустим, что

Тогда можно записать

Или

Следовательно если выбрать такое чтобы выполняет последние неравенство ( ) то и тогда можно выбрать так чтобы неравенство ( ) также удовлетворялось.

**Теорема**

Нулевое решение уравнения

Будет а.у. если будут выполняться следующие условия

**Reference**

[1] Ju.N. Bibikov, Local Theory of Nonlinear Analytic ODEs, in: Lecture Notes in Mathematics,vol. 702, Springer-Verlag, 1979

[2]C.Corduneanu, Integral Equations and Stability Feedback Systems.-New York, London: Academic Press,1973.

[3] C.Corduneanu, Integral Equations and Applications ,Cambridge University Press, Campbridge, 1991

[4] A.D. Brjuno, The Local Method of Nonlinear Analysis, Nauka, Moscow, 1972 (in Russian)

[5] A. Domoshnitsky. Exponential stability of convolution integro-differential equations, Functional-Differential Equations, 1998, vol.5, pp.445-455.

[6] A.Domoshnitsky, Ya. Goltser, One approach to study of stability of IDE, Nonlinear Analysis 47 (2001) 3885-3896.

[7] A.Domoshnitsky, Ya. Goltser, Hopf bifurcations of IDEs, Qualitative Theory of Differential Equations 3 (2000) 1-11.

[8] A.Domoshnitsky, Ya. Goltser, Floquet theorem and stability of linear integro-differential equations, Functional Differential Equations 10(3-4) (2003) 463-471.

[9] A.D. Drozdov and V.B. Kolmanovskii, Stability in Viscoelasticity, North Holland, Amsterdam, 1994.

[10] M.Fabrizio and A,Morro. Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity, SIAM Stud.Appl.Math., Philadelphia, 1992.

[11] F.R. Gantmacher, Theory of Matrices, Nauka,1967.

[12] Ya. Goltser, The process of normalization and solutions of bifurcations problems of the oscillations and stability theory: A synopsis, Functional Differential Equations 1 (1993) 108-125.

[13] Ya. Goltser, On the stability of differential equations systems with the spectrum on the imaginary axis, Functional Differential Equations 4(1-2) (1997) 47-63.

[14] Ya. Goltser, A.Domoshnitsky, Bifurcation and stability of IDEs, Nonlinear Analysis 47(2001) 953-967.

[15] Ya.Golster, A.L.Kunitsyn, On the stability of autonomous system with internal resonance, Prikladnay Matematika I Mekhanika 59(6) (1075) 974-985(Russian). English trans.:Journal of App;ied Mathematics and Mechanics, PMM,39(6)(1976).

[16] Ya.Goltser, E.Litsyn, Volterra integro-differential equations and infinite systems of ODEs,Mathematical and Computer Modeling 42(2005) 221-233.

[17] J.M.Golden and G.A.Graham. Boundary value problems in linear viscoelasticity. Springer-Verlag,1998.

[18] M.E.Gurtin and Pipkin, A General Theory of Heat conduction with FiniteWare Speeds, Arch. Rat.Mech.Anal. 31(1968) 113-

[19] G.V.Kamenkov, selected work,vol. 1, 1979;vol.2,1972.

[20] A.M. Lyapunov, Collected work,vol. 2, Moscow, 1956.

[21] I.G. Malkin, Theory of Movement Stability, Nauka, 1966 (in Russian). Translation by the Atomic Energy Association, AGE-TR.-3352.

[22] I.G. Malkin,Nekotorye zadachi nelinejnykh kolebanij, 2004

[23] D.R. Merkin, Introduction to the Theory of Movement Stability, Nauka, 1971 (in Russian)

[24] A.M. Molchanov, Stability and Oscillations of Nonlinear approximation, Doklady Akademii Nauk SSSR 141 (1967) 24-27.

[25] A.Novick-Cohen. Conserved Phase-Field Equations with Memory, in Curvature Flows and Related topics, A. Damlamian, J.Spruck and A.Vistin, eds.,pp. 179-197, GAKUTO Internat.Ser. Math. Sci. Appl.,5. Gakkotosho, Tokyo, 1995.

[26] V.G. Veretnikov, Stability and Oscillations of nonlinear Systems, Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).

[27] V.R. Rumyantsev, A.S. Oziraner, Stability and Motion Stabilization for part of variables, Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).