

Cultura, Función de Utilidad y Crecimiento Económico.

El Caso de los Indígenas Mexicanos

Abstract

El artículo presenta una nueva forma de abordar la relación entre cultura y teoría económica. Primero se muestra una evaluación de la literatura sobre la relación entre cultura y economía (se revisaron más de 200 artículos); posteriormente se vincula un subconjunto de lo que se entiende por cultura con la función de utilidad y/o con las restricciones y, a través de dicha vinculación, se desarrolla un modelo riguroso de crecimiento económico, que se usa para analizar la pobreza de las comunidades indígenas mexicanas, el cual se complementa con evidencia empírica e histórica sobre dicha relación.

I. Introducción

En México, aproximadamente el 6% de la población de 5 años de edad o más son indígenas, según al Censo 2010, ¹ lo que representa 6.3 millones de personas, de acuerdo al criterio de lenguaje, que implica que hablen y utilicen alguna de las lenguas indígenas reconocidas. La historia de los indígenas mexicanos los ubica como el sector de la población más pobre de México, desde hace cientos de años. La pregunta a responder es: si en el largo plazo la tecnología es un bien público y las instituciones son iguales para todos los habitantes de México ¿por qué estas comunidades han sido las más pobres, con un crecimiento económico per cápita inferior al del resto de los mexicanos? Todo indica que la causa de su pobreza no parece estar en el ámbito económico, sino en el cultural.

Sin embargo, para analizar la cultura y su relación con el comportamiento económico, es necesario especificar claramente lo que se va a entender por cultura y la forma de introducirla en un modelo de crecimiento económico. Por ello, primero se llevó a cabo una evaluación de la literatura sobre la relación entre economía y cultura, y a partir de sus resultados, se muestra una forma de introducir la cultura en la función de utilidad y/o en las restricciones. Posteriormente se presenta un modelo de crecimiento económico, en donde la cultura se

¹ Censo Ampliado de Población y Vivienda 2010, muestra del 10 por ciento del Censo de Población y Vivienda, Censo (2010).

introduce a través de la función de utilidad, tal que explique la pobreza sistémica de las comunidades indígenas mexicanas de una forma rigurosa.

II. Cultura y teoría economía

Se revisaron 234 artículos académicos, escogidos de acuerdo al siguiente criterio: que el título contenga alguna de las palabras “culture” o “cultural”, en el periodo del año 2000 hasta agosto de 2017, de las 50 revistas más citadas de acuerdo a Thompson (2016) de Economía, además de otras seis publicaciones arbitradas que contienen de forma recurrente el término.² Se obtuvieron los siguientes resultados:

Del total de artículos revisados, 57 cuentan con una definición explícita de cultura, en los que se utilizaron 18 definiciones, algunas de ellas similares; asimismo, 19 artículos están dedicados a *Economics of the Arts and Literature*; 44 tienen una definición compuesta (como *Ecological Culture*, *Culture of Crime*, etc.) y los 112 restantes no tienen definición explícita. De estos últimos, 66 son empíricos, y la gran mayoría de ellos utiliza cultura como nacionalidad, lenguaje, religión o etnia, y los 48 restantes (conceptuales y teóricos) usan la palabra cultura de una forma menos restringida que los modelos empíricos, pues no necesitan medirla. Usan cultura como sinónimo de *Beliefs*, *Values*, *Norms*, *Inheritance of ancestors*, etc., y en algunos casos incluye, además, lugares y ambiente.

Por último, pero muy importante: 140 artículos utilizan algún componente de la cultura como exógeno y examinan su influencia sobre algún tema económico, siendo la nacionalidad la acepción de cultura más usada; 29 artículos analizan componentes de la cultura desde diferentes perspectivas, ya sea desde un enfoque institucionalista, de cultura corporativa o sobre la medición de cultura, principalmente; 25 estudian cambios en algún componente específico de la cultura para muy diversos temas, como altruismo, características familiares, etcétera; 12 usan algún componente de la cultura como una variable endógena, de los cuales siete son de teoría de juegos y los cinco restantes a través de alguna clase de optimización, y

² Las publicaciones que se adicionan son: Journal of Economic Issues, Journal of Socio-Economics, European Economic Review, Journal of Economic Behavior & Organization y Journal of Development. En total son 236 artículos de acuerdo al criterio utilizado, pero se excluyeron dos por usar la palabra cultura como parte de un nombre propio (Cultural Revolution) y como un sistema tecnológico (tissue culture).

los nueve restantes analizan la relación entre cultura y ecosistemas, principalmente la forma de valorar socialmente dicho ecosistema. La relación anterior indica que el 65 por ciento de los artículos hablan de la afección de componentes culturales exógenos hacia un tópico económico.

La conclusión del análisis es que a) el término cultura se utiliza para explicar situaciones que la teoría económica no puede contestar, principalmente diferencias observables sobre el comportamiento económico de individuos y empresas que se suponen iguales (al menos teóricamente) bajo entornos y situaciones diferentes, como distintas regiones, etnias, nacionalidades, religiones, creencias, valores y más. De ahí el gran interés por el tema. La mayoría de los análisis utiliza algún componente de la cultura como exógeno, para explicar su relación con algún tema económico; y b) el análisis también arroja que dicho término no tiene una definición aceptada, por lo que se utiliza con definiciones diferentes o sin ellas, usando la cultura algunas veces como una caja negra para explicar comportamientos económicos disímboles. Por ello, si se quiere profundizar en la relación entre cultura y economía, se necesita definir claramente lo que se entiende por cultura, pero sobretodo, se requiere introducir el término en los modelos formales.

III. Cultura

Una forma de quitarle ambigüedad al término cultura será conservar del vocablo la única propiedad que comparten todas las definiciones, y de hecho la única peculiaridad en que coinciden todos los artículos analizados, que es el atributo de que la cultura se compone de factores que comparten grupos de individuos, es decir, son factores sociales. En este artículo restringiremos los factores sociales solo a aquellos que influyan al individuo a través de sus preferencias (función de utilidad) y/o sobre las restricciones. Ello le va a quitar generalidad al término cultura, pues siguiendo los resultados del análisis bibliográfico, no toda la cultura influye en la función de utilidad y/o en las restricciones, pero la ventaja es que será el camino para introducir a la cultura en los modelos formales.

III. A. Cultura y función de utilidad.

Generalmente, las decisiones de los individuos son influenciadas por uno o varios factores. En ese sentido, se define un factor de influencia (FI) como cualquier circunstancia identificable por el individuo que afecte su ordenación de preferencias, pero no los supuestos básicos sobre su ordenación. Por supuestos básicos nos referiremos en adelante a la transitividad, completitud, continuidad, convexidad y estricta monotonía de la relación de preferencias. El que el FI conserve los supuestos básicos es un requisito de racionalidad, independientemente de la filosofía que exista detrás del FI.

Por ejemplo, si algún FI afecta a un individuo (digamos, por alguna revelación divina) y pasa de ser un consumista a un eremita, sus preferencias cambiarán sustancialmente, pero no por ello se tendría que modificar alguno de los supuestos, pues las comparaciones entre canastas de bienes ya no se harán con las canastas de su época de consumista. Un ejemplo de un FI poco aceptado sería una sociedad que comparte la creencia de que “los humanos no deberían comer carne roja porque no tienen garras”, que sería un FI, pero no habría motivo para que las decisiones, incluyendo dicha creencia, no cumplieran con los supuestos básicos, aunque la creencia no parezca tener fundamento. Simplemente los individuos dejarán de consumir carne roja y la sustituirán por otra cosa.

El sustento de la FUF descansa en la comparación de utilidades intra-individuales (es decir, entre el mismo individuo), la cual se usa principalmente en funciones de utilidad intertemporales así como entre categorías de bienes. En este artículo añadiremos una más, que será la comparación de utilidades de acuerdo a factores de influencia.

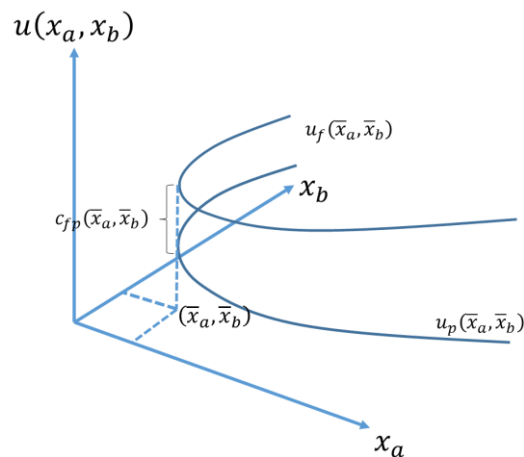
La idea de la intra-comparabilidad entre un individuo de acuerdo a factores de influencia se puede explicar fácilmente considerando primero un solo FI sobre canastas de consumo x . Sea $u_p(x)$ la función de utilidad primitiva, es decir, sin el FI, y sea $u_f(x)$ la función de utilidad final, la cual incluye el FI, siendo ambas funciones continuas y cuasi cóncavas, pues los supuestos se siguen cumpliendo. Dado que el rango de ambas funciones está en la recta real, entonces la influencia del factor la podemos definir como $c_{pf}(x) = u_f(x) - u_p(x)$, en donde $c_{pf}(x)$ es una función continua, ya que ambas funciones de utilidad lo son, y que

identifica la influencia del factor en términos de la utilidad. Como existen dos funciones de utilidad, la primitiva y la final, entonces por cada canasta $\bar{x} \in x$ pasan dos curvas de indiferencia. La comparación entre ellas, $c_{pf}(\bar{x})$ es la distancia vertical entre ambas funciones en el punto \bar{x} (ver Gráfica 1 para el caso de dos bienes). La función de utilidad considerando el FI será:

$$(1) \quad u_f(x) = u_p(x) + c_{pf}(x)$$

donde $c_{pf}(x) = u_f(x) - u_p(x)$, al cual lo vamos a denotar como $\Delta u_1(x)$. A esta función vamos a llamarla Función de Utilidad Factorial (FUF).

Gráfica 1



Supongamos ahora dos FI. Cuando tenemos más de un factor, puede haber relación entre ellos de muchas clases. Por ejemplo, en algunos casos el FI(1) puede ser incompatible con el FI(2), o pueden ser interdependientes, en cuyo caso uno de los factores afectaría la influencia del otro factor sobre la función de utilidad, y viceversa. Con objeto de conocer si existen otros factores cuando se analiza uno de ellos, se define la variable $Z(i)$, con $i = 1, 2$, en donde $Z(1)$ indica que solo está activo el primer factor y $Z(2)$ que ambos factores están activos. Usando la ecuación (1), definimos la influencia de cada factor, dado que está activo el otro factor, como: $u_i(Z(2), x) = u_p(x) + c_{ip}(Z(2), x)$, con $i = 1, 2$. Nótese que $u_1(Z(1), x)$ no necesariamente es igual a $u_1(Z(2), x)$, pues el factor 2 puede tener alguna relación en la

influencia del primer factor. Para agregar la influencia de los factores, es importante tener en cuenta que la utilidad de cada uno de ellos es la primitiva más el aumento neto por el factor, como se definió en la ecuación (1). En este sentido, para tener la utilidad total habrá que sumar la utilidad primitiva más el incremento neto en la utilidad por cada factor de influencia, dada la influencia del otro factor, es decir: $u_f(Z(2), x) = u_p(x) + c_{1p}(Z(2), x) + c_{2p}(Z(2), x)$. Usando las definiciones de utilidad de cada factor tenemos:

$$(2) \quad u_F(Z(2), x) = u_p(x) + [u_1(Z(2), x) - u_p(x)] + [u_2(Z(2), x) - u_p(x)]$$

que sería la utilidad factorial para dos factores de influencia. La derivación formal para el caso de n factores se deja para el apéndice.

Es importante señalar que los factores de influencia son exógenos para el individuo, aunque el efecto sobre la utilidad podrá ser diferente para cada persona. En este sentido, no se permite que el individuo decida sobre el efecto de dichos factores endógenamente, es decir, no se permite la disonancia cognitiva, que para algunos autores es signo de irracionalidad (Lester and Yangb, 2009).

La ventaja de la FUF es que es posible a) separar o desglosar la función de utilidad para mostrar la influencia de los factores, b) analizar rigurosamente dicha influencia y c) que al hacer los dos puntos anteriores, se cumpla con los axiomas y supuestos de la función de utilidad. En el Apéndice se demuestra que la única forma de hacerlo es a través de la FUF.

Obviamente, la forma de la FUF va a depender de las características de los FIs. Por ejemplo, si los FIs afectan solamente a un grupo de bienes que no están en la función de utilidad primitiva, o si los bienes afectados son fuertemente independientes de los no afectados, entonces dichos FIs pueden ser representados por una función aditiva, o bien si los FIs pueden representarse a través de una función de utilidad similar a la primitiva, como una Cobb Douglas, el análisis sería más simple que si fueran funciones de utilidad diferentes. Pero algo muy importante es que, al construir la FUF, es necesario especificar con claridad lo que se

entiende por cultura, con lo cual se evita que la definición de cultura se vuelva una caja negra, como se pudo comprobar en el análisis bibliográfico de la sección II.

III. B. Función de utilidad versus restricción

Hasta el momento hemos supuesto que el o los FIs han sido internalizados por el individuo, por lo que aparecen en su función de utilidad. En el otro extremo estarían los factores de influencia que se siguen de acuerdo a alguna ganancia neta esperada o a algunas restricciones. El valor *no robaras* puede provocar que mucha gente, por convicción, no lo haga, pues respetar la propiedad ajena es un imperativo moral, por lo que robar implicaría una disminución en la utilidad. Empero, otras gentes evaluarán robar de acuerdo a la probabilidad de que lo sorprendan y del castigo, siguiendo una función de utilidad esperada. Y, por supuesto, está el caso intermedio, en donde la gente decide de acuerdo al propio valor moral y a la probabilidad de que lo capturen. El conocer cuándo un FI funge como una parte de la función de utilidad (está internalizada) o cuando es una restricción puede ser de mucha importancia, pues esta distinción afecta de forma distinta a la función de utilidad indirecta. Con lo dicho en esta sección, se analizará la situación de pobreza de los indígenas mexicanos usando una FUF.

IV. Comunidades indígenas en México

La pobreza de las sociedades indígenas en México es evidente: más del 50 por ciento de los municipios que tienen mayoría de población indígena enfrentan el mayor grado de marginación, de acuerdo con el Índice de Marginación 2010 de México, y el 93 por ciento tienen al menos un alto grado de marginación, comparado con 14 y 47 por ciento, respectivamente, en todo México. Sin embargo, las comunidades indígenas han enfrentado la misma situación económica e institucional que la población no indígena durante cientos de años, pero su crecimiento ha sido consistentemente menor. ¿Qué ha causado esa pobreza?

Un primer factor sería la discriminación. De acuerdo a la Encuesta Nacional de Discriminación (END, 2017), en México el color de piel oscura genera discriminación, así como hablar una lengua indígena (Martínez Casas *et al*, 2014 y Acharya y Barragán, 2012). Sin embargo, esta situación solamente se analizará brevemente en el modelo, pues nos

enfocaremos en factores internos. A continuación se presentan algunas características de las comunidades indígenas, con objeto de establecer cuáles son los FIs que afectan su comportamiento económico. El análisis se concentrará en las zonas rurales (poblaciones de no más de 2.5 mil habitantes) que es donde viven el 62.1 por ciento de la población total indígena, debido a que es su entorno histórico y a que las personas indígenas que han migrado permanentemente, con el tiempo, abandonan su lengua (Ordorica, *et al*, 2009, Yoshioka, 2010) en cuyo caso dejarían de ser indígenas, de acuerdo a la definición que estamos usando en este trabajo.

Ingreso y consumo. — El ingreso medio por personas indígenas reportado en el Censo 2010 fue un 22 por ciento más bajo que el de los no indígenas de su mismo municipio. Asimismo, no se encontró evidencia de que el ingreso entre comunidades indígenas sea más homogéneo que el de no indígenas, ni tampoco entre las principales etnias. Respecto al consumo, la media de su tenencia de bienes muebles e inmuebles que reportaron en el Censo 2010 (refrigerador, estufa, calidad de los materiales de la casa habitación, etcétera) es inferior, en promedio por municipio, para los indígenas que para los no indígenas, en todos los bienes. Asimismo, no existe evidencia de algún FI que afecte su consumo. Consumen menos porque tienen un ingreso menor a los no indígenas, no por cuestiones culturales.³

TABLE 1. TYPE AND WORK ACTIVITY IN RURAL AREAS OF MEXICO (PROPORTIONS)

TYPE OF JOB	INDIGENOUS PEOPLE	NON INDIGENOUS	WORK	INDIGENOUS PEOPLE	NON INDIGENOUS
Employee	15.6	38.8	Maize and beans	41.4	11.5
Laborer or Assistant	20.9	24.3	Other agriculture	23.4	23.5
Employer	0.8	2.0	Construction	7.8	10.1
Self-employed	47.2	27.5	Craftsmen	3.4	1.9
Unpaid relative	15.4	6.4	Shopkeepers	3.4	6.4

Source: Census 2010

³ Un caso en el cual existen FIs en el consumo es el de los menonitas y, en particular, el de las comunidades Amish, en donde sus FIs no les permiten utilizar ciertos bienes, como celulares, automóviles, televisores, etcétera.

Trabajo. — La agricultura es la ocupación principal de las comunidades indígenas, la cual generalmente combinan con otras labores secundarias. De acuerdo con fuentes etnográficas,⁴ en general la agricultura y la producción artesanal las llevan a cabo sin especialización económica y con tecnología tradicional.⁵

Respecto a la especialización económica, el 47.2 por ciento de la población económicamente activa indígena rural trabaja como empleado por cuenta propia, y el 15.4 por ciento como familiar sin pago, siendo esas proporciones muy superiores a las de la población no indígena (ver Tabla 1), y produciendo bienes que no son parte de un proceso productivo. Es decir, más de la mitad del PEA indígena no se especializa. En contraposición, prácticamente no existe evidencia de empresas conformadas por indígenas, que incorpore disciplina de fábrica (Clark, 1994), en el sentido de que algún miembro de la comunidad, en calidad de empresario que busca maximizar sus beneficios económicos, decida por sus empleados cómo hay que hacer las cosas, cuándo y en dónde.

La tecnología tradicional es difícil de precisar empíricamente, pero se conoce su uso por parte de las comunidades indígenas por los textos etnográficos, como es el caso de la producción de maíz y frijol, que producen con tecnología tradicional. Además, la proporción de personas dedicadas a esa actividad es mucho más alta en el sector indígena que en el sector no indígena (ver Tabla 1), lo cual se debe a una combinación tanto de factores culturales como de autoconsumo.

Sin embargo, el caso de las artesanías es donde mejor se puede apreciar la ausencia de especialización y del uso de tecnología tradicional. Si bien solo el 3.4 por ciento lo hace como actividad principal, la mayoría de indígenas se dedican a ellas como actividad secundaria. Las fuentes etnográficas muestran que la producción de artesanías se lleva a cabo en talleres familiares, con tecnología tradicional y sin especialización económica. Asimismo, existe una

⁴ Por fuentes etnográficas nos referimos a CDI (2013) y Millan y Valle (2003), que son varios estudios etnográficos de las principales etnias de México.

⁵ La tecnología tradicional podría incorporar a la especialización económica, por lo que, para evitar confusiones, la vamos a definir como la utilización de procesos individuales y capital físico parecidos o iguales a la que utilizaban sus padres, independientemente de si existe especialización económica o no.

tendencia a la especialización artesanal por comunidad, lo cual se debe más a cuestiones culturales que de eficiencia económica, pues cada familia las produce por separado.

Los factores de influencia. — Teniendo en cuenta lo anterior, se definen dos FIs: el primero es que las comunidades indígenas rurales manifiestan una tendencia a trabajar sin especialización económica, o similarmente, muestran una animadversión a la disciplina de fábrica. El segundo FI es que revelan una preferencia a usar una tecnología tradicional. Sin embargo, para entender la lógica de estos FI será necesario explicar también su estructura tradicional de gobierno.

Gobierno. — El sistema de gobierno relacionado con su cultura, llamado sistema de cargos rotativos (Chance y Taylor, 1985) es un esquema jerárquico de cargos para la administración civil y religiosa de la comunidad, en el cual algunos miembros son escogidos anualmente para realizar diversas funciones, siendo las más importantes de tiempo completo, pero generalmente no son remuneradas, por lo que existen claros incentivos para no continuar en ellas. Sin embargo, aquellos individuos que han cumplido con los cargos que se le han encomendado a lo largo de su vida, que ya son personas mayores de edad, se vuelven gente con una gran influencia en las decisiones de la comunidad, y son los candidatos para integrar el consejo, que en algunos casos es el máximo rector en cuestiones sociales, jurídicas y económicas, junto con la asamblea, integrada por la mayoría del pueblo.⁶

Tres cuestiones son importantes sobre el tipo de gobierno y las relaciones familiares: a) si los individuos que detentan los cargos son escogidos por tener más ingresos que el resto, este sistema fomentaría la igualdad económica, b) estas comunidades son gerontocráticas, como lo muestra el hecho de que las personas mayores forman el consejo y son las que tienen mayor influencia en las decisiones comunales y c) existe una alta reciprocidad dentro de las comunidades indígenas (Millán y Valle, 2003). Se expone a continuación la hipótesis sobre las causas que llevaron a las comunidades indígenas a mostrar preferencias sobre los dos FIs y la lógica del sistema de cargos rotatorios.

⁶ El sistema de cargos rotativos intra e inter étnicos del país es muy heterogéneo, habiendo comunidades que han dejado de usarlo.

IV. A. Los FI como estrategia para producir bienes públicos

La hipótesis es la siguiente: una sociedad produciendo los mismos bienes, con los dos FIs y la reciprocidad, tenderá a la igualdad económica, pues en esencia, cada familia indígena sería igual a las otras; asimismo, las decisiones importantes las comparten, a través de la asamblea y las ejecutan mediante el sistema jerárquico de cargos rotativos. Bajo ese esquema, la sociedad sería muy eficiente para producir bienes públicos. En el caso de los indígenas mexicanos, la tendencia a la igualdad fue impulsada al principio por factores exógenos, pero después fue usada como una estrategia para la defensa de sus tierras, es decir, para la producción de un bien público, lo cual duró más de 250 años. Sin embargo, con el paso del tiempo los FIs y los cargos rotativos pasaron a ser parte esencial de su cultura. Antes de presentar la evidencia histórica, es preciso aclarar la relación entre los FIs y su sistema de gobierno, con la provisión eficiente de un bien público.

Como se sabe, la solución de mercado no es eficiente para la producción óptima de bienes públicos. Empero, las familias de las comunidades indígenas, produciendo los mismos bienes, bajo un esquema con los FIs y la reciprocidad, teóricamente llegarían a la igualdad económica. En ese caso, la contribución voluntaria no llevaría al óptimo de Pareto (Cornes y Sandler, 1996), pero sería igual para todos. De esta forma, si quieren producir determinada cantidad del bien público, simplemente se calcula su costo y se divide por igual entre los miembros. El resultado, de nuevo, no necesariamente sería un óptimo de Pareto, pues las preferencias no son iguales, pero cuando se producen bienes públicos, las preferencias individuales se subordinan al interés colectivo, dado que las decisiones se toman en asamblea, generalmente bajo un sistema de votación presencial, en donde cada uno vigila al otro, y/o un sistema de gobierno dirigido por un consejo de ancianos, que están ahí por su alta contribución a la producción de bienes públicos. Todo ello minimizaría el problema del *free rider* y la administración y ejecución del bien público se facilitarían en gran medida.

La hipótesis no pretende la igualdad económica estricta entre los individuos, sino que requiere que al menos hayan tendido a la igualdad económica cuando la producción de los bienes públicos tenía gran importancia. En la actualidad no se observa la igualdad económica,

ni homogeneidad entre etnias, pero sí se observan los FIs, el sistema de cargos rotatorios y un menor ingreso y consumo. Dado lo anterior, se presenta a continuación la evidencia histórica del desarrollo de esa estrategia para producir bienes públicos. El análisis se ubica en la parte central y sur de lo que era la Nueva España, y que actualmente es parte de México y Guatemala, región que se conoce como Mesoamérica, en la época posterior a la conquista de ese territorio por parte de los españoles.

IV. B. Los pueblos de indios

En la Nueva España, a mediados del siglo XVI, en la época denominada la Colonia (1535-1810) fueron creados los pueblos de indios,⁷ que eran comunidades integradas por familias indígenas, denominados *maceguals*, con administración propia, cuyo gobernador, también indígena, llamado *cacique*, fungía como intermediario entre los españoles y la población indígena, sobre todo para el pago de impuestos. Cada familia *macegual* tenía su propia parcela para su usufructo, no en propiedad privada, pero inalienable y con derecho a herencia, siempre que se trabajara; y los pueblos contaban con tierras comunales.

Los pueblos de indios fueron comunidades cuya principal actividad económica, además del sustento de sus integrantes, era la producción destinada al pago de tributos y de bienes públicos. El pago de impuestos era tanto en especie y dinero como en mano de obra, que eran destinados a la corona, a empresas y a la iglesia, dentro y fuera de las comunidades.

Desde su implementación y hasta mediados del siglo XVII, existieron varias circunstancias que llevaron a los pueblos de indios hacia una homogeneización económica: a) estas comunidades eran tratadas como grupo. Por ejemplo, el pago de impuestos se calculaba de acuerdo al número de integrantes del pueblo, pero el pago era conjunto y a través del *cacique* y no de cada *macegual* por separado, b) la iglesia católica tuvo una fuerte injerencia en su vida económica, y muchos frailes tenían una visión de la organización comunal muy relacionada con las primeras comunidades cristianas del siglo I; prueba de ello es el caso de Vasco de Quiroga, obispo de Michoacán, que fundó varios pueblos cuyas reglas estaban

⁷ La exposición que se presenta está muy abreviada y no aborda muchos detalles. Una explicación completa de los pueblos de indios en el centro de México puede ser encontrada en Gibson (1964) y en Lockhart (1992).

basadas en el libro de Utopía, de Tomás Moro, donde todos eran iguales económicamente, aunque con su adaptación católica (Lynch 2012) y c) los incentivos económicos para el desarrollo económico privado dentro de los pueblos de indios fueron nulos, por lo que muchos indígenas migraron fuera de los pueblos, en busca de mejores oportunidades, aun y cuando la discriminación hacia ellos era importante.

Es así que el pago de impuestos comunales, la intervención de la iglesia y los nulos incentivos económicos forzaron a estas comunidades a tener una economía de igualación. Pero además, al enfrentar fuertes presiones por despojarlos de sus tierras, que eran su principal sustento, los indígenas adoptaron esa igualación económica como estrategia para producir una defensa eficaz. A continuación profundizaremos en este punto.

Los bienes públicos. — En esa época hubo dos situaciones que fomentaron la producción de bienes públicos. La religión y la defensa judicial. Por diversas circunstancias, los indígenas adoptaron una gran religiosidad con muchas manifestaciones materiales (Israel, 1975, Lynch 2012), y el pago de todas las actividades religiosas era a cargo de los *maceguals*. Pero el principal bien público fue su defensa jurídica, ya que la defensa militar no era una opción asequible.⁸ Los pueblos de indios se enfrentaron a muchos problemas, primordialmente a la posibilidad, siempre latente, de perder sus tierras, por acciones legales o ilegales por parte de colonos y empresas agrícolas, además del abuso de parte de sus *caciques*, el cobro excesivo de impuestos y conflictos de tierras con otras comunidades. Los pueblos de indios usaron el sistema judicial intensamente, y en ello participaban directa o indirectamente todos sus integrantes. Es importante observar que el *macegual*, de forma individual, era visto como un sujeto “miserable” (Ruiz Medrano, 2010), pero colectivamente obtuvieron mucha fuerza. Obviamente todo ello derivó en altos costos que fueron sufragados por la comunidad, y muchos juicios se perdieron precisamente porque el pueblo no podía sufragar los gastos.

Sin embargo, con el tiempo los incentivos cambiaron. La necesidad de mano de obra conjunta para las grandes construcciones (principalmente iglesias y conventos) disminuyó, y la

⁸ La historia completa de la defensa jurídica de los pueblos indígenas se puede ver en Ruiz Medrano (2010) y para una explicación a detalle sobre los mismos juicios y sus participantes, ver Kellogg (1995).

migración se volvió una buena opción, principalmente por que las empresas mejoraron sus condiciones, además de que muchos indígenas aprendieron varios oficios. De hecho, los integrantes de los pueblos de indios más grandes se dispersaron para integrarse al resto de la economía. Pero también hubo grupos de indígenas que decidieron formar nuevos pueblos de indios, más pequeños y alejados (Lockhart, 1992) además de que muchos de los que ya estaban, generalmente pequeños y lejos de los centros económicos, continuaron con pocos cambios. De acuerdo con Gibson (1964), durante el siglo XVIII y principios del XIX los pueblos de indios aumentaron en número pero disminuyeron en tamaño e importancia económica.

Los *maceguales* que siguieron viviendo en los pueblos de indios continuaron con su estilo de vida, pues las amenazas por sus tierras nunca desaparecieron. Su vida económica continuó sin especialización económica y con la misma tecnología. Su alternativa era migrar e integrarse a la economía, pero no lo hicieron y revelaron un gusto por esa forma de vida. Los que se fueron o los pueblos de indios que fueron absorbidos por ciudades, con el tiempo, dejaron de hablar su lengua (Chance, 1976) por lo que es muy probable que las actuales comunidades indígenas provengan de pueblos de indios que sobrevivieron.

De la Independencia a la actualidad. — Después de la independencia de México, los pueblos de indios desaparecieron legalmente. El gobierno liberal fomentó la propiedad privada y el uso de tecnología moderna. Sin embargo, muchos de los pueblos se negaron a cambiar y lo consiguieron por su capacidad de defensa (Buve 1992). En esta época ya existe evidencia de las FIs como parte de su cultura: en primer lugar su misma negativa a cambiar y oponerse a la propiedad privada, y la resistencia a aceptar cambios tecnológicos, que ya era un tipo de tecnología con disciplina de fábrica, importada de la Revolución Industrial Inglesa. Pero también las declaraciones de políticos e intelectuales liberales, que tachaban a los pueblos indígenas de ser un lastre para la modernidad, de *despreciar la libre empresa y la nueva técnica*, y atributos similares (González, 1996).

Pero al no aceptar esos cambios, el ataque a sus tierras regresó y, como consecuencia, los pueblos profundizaron en su defensa comunal, y aprovecharon las circunstancias para

afianzar sus propias estructuras internas, como fue el sistema de cargos rotativos, que de acuerdo a Chance y Taylor (1985) se consolidó en esa época.

A partir de la tercera década del siglo pasado, los gobiernos comenzaron a repartir las tierras a los campesinos, incluyendo a los pueblos indígenas que habían perdido sus tierras a manos de latifundistas, durante la última parte del siglo XIX y principios del XX. El reparto fue bajo una tenencia en usufructo, no privada pero inalienable y heredable (de Grammont *et al*, 2009), que para los que pudieron demostrar su tenencia, que fue el caso de la mayoría de los pueblos de indios, se les llamó tierras comunales. Actualmente, las comunidades indígenas siguen con ese tipo de tenencia de tierra, muy similar a la época de la Colonia.

No existen pruebas directas de que las actuales comunidades indígenas sean los descendientes directos de los pueblos de indios, pero la evidencia indica que las comunidades indígenas que han sobrevivido hasta la fecha son las que adoptaron las pautas para la producción de bienes públicos. Esto no significa que todas las comunidades que adoptaron esas estrategias hayan sobrevivido, sino que aquellas que sobrevivieron siguieron estas estrategias, por lo que en este sentido la estrategia de producción de bienes públicos fue exitosa.

IV. C. De la estrategia a la cultura

La repetición de esa forma de vida en los pueblos de indios, a lo largo de muchas generaciones, se afianzó como parte de su cultura, y generó los FIs. Esta idea es reforzada por dos puntos: a) la estrategia de defensa se ha incorporado a las tradiciones, costumbres, tabúes y mitos, perdiendo buena parte de su objetivo principal ⁹ y b) las comunidades indígenas tienen un vínculo muy fuerte con el pasado, pues como ya se mencionó, son sociedades gerontócratas, pasando a tener solamente una vía de transmisión cultural, que sería vertical, es decir, de padres a hijos, ¹⁰ lo que aseguraría la transmisión cultural

⁹ Sin embargo, Ruiz Medrano (2010) presenta casos de comunidades indígenas actuales que siguen en procesos judiciales en defensa de sus tierras.

¹⁰ Los modelos de transmisión cultural suponen que la transferencia puede ser vertical (de padres a hijos), horizontal (entre pares) y oblicua (televisión, redes sociales, etcétera). Ver Bisin y Verdier (2001).

intergeneracional de los FI. ¹¹ Conociendo ya los FI de las comunidades indígenas así como su origen, podemos presentar el modelo de crecimiento económico.

V. Modelo de crecimiento económico

En esta sección se presenta un modelo de crecimiento económico para una sociedad grande, en la cual existen especialización económica e incentivos para el desarrollo de nuevas tecnologías. Posteriormente se introduce una comunidad dentro de esa sociedad, precio aceptante y con una función de utilidad factorial con los dos FIs.

V. A. Modelo básico

Los supuestos básicos del modelo son: generaciones traslapadas, ausencia de capital físico, competencia e información perfectas, cero costos de transacción así como movilidad total de trabajo, y donde la investigación existe pues el conocimiento acumulado genera oportunidades económicas. La sociedad S está formada por un número grande de familias, integradas por un padre y un hijo, cada uno de los cuales viven dos periodos. En el primero son jóvenes, reciben su consumo de sus padres y se dedican a capacitarse en la educación necesaria para trabajar y también en desarrollar nueva tecnología. Es en esta parte donde se genera el crecimiento del conocimiento. No se va a profundizar en los incentivos para producir nueva tecnología, dado que no son de nuestro interés y facilita el análisis de los factores de influencia social. En el segundo periodo, los jóvenes ya son padres y trabajan aplicando sus conocimientos y al final mueren sin dejar herencia, por lo que no tienen necesidad de ahorrar. Como es habitual, primero se determina el equilibrio estático para luego añadir las generaciones.

Economía estática. — Al principio del segundo periodo, cada padre $i \in S$ es dotado con una unidad de trabajo ($L_i = 1$) medida en tiempo, perfectamente divisible (es decir, puede dedicar su tiempo a diferentes actividades) y recibe por ello uno o varios sueldos, dependiendo del número de trabajos que tenga. Su ingreso lo utiliza para su manutención y la de su hijo. Para la economía estática omitimos el subíndice respecto al tiempo.

¹¹ Por ejemplo, en el modelo de transmisión cultural de Bisin y Verdier (2001), si se considera solamente la transmisión vertical, el modelo indicaría que la probabilidad de la transmisión de padres a hijos es la unidad.

Demanda: Siguiendo el modelo de Grossman y Helpman (1991), la función de utilidad para la familia representativa es del tipo CES (Dixit-Stiglitz), la cual contiene un gran número de bienes sustitutos cercanos:

$$(3) \quad u = \left[\sum_{i=1}^{N+Q} x_i^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

donde x_i es el consumo del bien i , con $i = 1, 2, \dots, N + Q$, y $0 < \alpha < 1$. El número de bienes para consumir es $N + Q$, donde N son los bienes existentes y Q los nuevos bienes desarrollados al final del periodo anterior. El programa de maximización por familia será:

$$(4) \quad \max \Omega = \left[\sum_{i=1}^{N+Q} x_i^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} - \mu \left[\sum_{i=1}^{N+Q} p_i x_i - E \right]$$

donde p_i es el precio del bien x_i , y E el gasto total. Por facilidad, vamos a suponer los precios iguales desde ahora, con lo cual la demanda de cada bien tiene la siguiente forma:

$$(5) \quad x_i = \frac{E}{p} \frac{1}{(N + Q)}$$

Producción: Las empresas no tienen propiedad, ni existen costos de transacción, por lo que solamente se juntan los trabajadores para formar empresas y producir determinado bien, buscando maximizar las utilidades totales.¹² Se supone que el bien 1 fue el primero en inventarse, después el 2 y así sucesivamente. Los primeros bienes son los más sencillos en su manera de producir. Para producir el bien 1 solo se necesita de un tipo de trabajo, para el 2 se necesitan dos tipos de trabajadores especializados y así hasta los $N + Q$ bienes de consumo, reflejando que los últimos bienes necesitan mayor especialización. La función de

¹² Maximizar los beneficios por trabajador o maximizar los beneficios totales es igual, pues la función de producción presenta rendimientos constantes a escala.

producción de cualquier empresa (omitimos el subíndice de la empresa) en la industria del bien h , con $h = 1, 2, \dots, N + Q$ será:

$$(6) \quad x_h = \Phi_h \min[L_1, L_2, \dots, L_h]$$

en donde h va a indicar, además de la industria, el número de especialidades para producir dicho bien. El parámetro Φ_h se refiere a las actualizaciones tecnológicas de la industria, que alquila a empresas que las desarrollan, donde el pago total de la actualización es $\gamma_h x_h$, que está en función de la producción, donde γ_h es el precio unitario de la actualización. Esto quiere decir que, si bien la tecnología es libre, su aplicación tiene un costo proporcional al nivel de la producción. El que las empresas usen la última actualización quiere decir que están sobre la Frontera de Posibilidades de Producción (FPP). En este sentido, la función de costos para cualquier empresa de la industria h será: $CT_h = \sum_{j=1}^h w_{jh} L_{jh} + \gamma_h x_h$, donde w_{jh} es el salario de la especialización j en la industria h , con $j = 1, 2, \dots, h$.

Dada la función de producción (6), en el óptimo $L_{ih} = L_{jh}$, para todo $i, j = 1, 2, \dots, h$, por lo que la función de producción de la industria h será:

$$(7) \quad x_h = \Phi_h L_h^d$$

donde L_h^d es el trabajo total contratado para el periodo. En este sentido, para la misma cantidad de producción, la demanda de trabajo para el bien $h = 1$ será $L_1^d = L_{1h}$, para el bien $h = 2$, la demanda de trabajo será $L_2^d = (1/2)(L_{1h} + L_{2h})$ y así hasta el bien $h = N + Q$ cuya demanda será $L_j^d = (1/(N + Q))(\sum_{k=1}^{N+Q} L_{kh})$. Con ello, L_h^d va a indicar la demanda de trabajo total en la industria h . Nótese que, para la misma cantidad de producto, $L_i^d = L_j^d$ para toda industria $i, j = 1, 2, \dots, N + Q$, pero la diferencia es que la industria i requiere i especializaciones y la industria j requiere j especializaciones. Por competencia e información perfectas y por la forma de la función de producción, el salario será igual para todas las

especialidades; suponiendo además que el pago de las actualizaciones de la industria h es igual para todas las empresas, y sustituyendo en la función de costos tenemos:

$$CT_h = \sum_{j=1}^h w_h L_{ih} + \gamma x_h = w L_h^d + \gamma_h x_h = w_h \left(\frac{x_h}{\phi_h} \right) + \gamma_h x_h = \left(\frac{w_h}{\phi_h} + \gamma_h \right) x_h$$

donde se contratarán las actualizaciones si, para una misma producción y un mismo salario, el costo total es menor, es decir:

$$(8) \quad \gamma_{ht} - \gamma_{ht-1} \leq w_h \left(\frac{\phi_{ht} - \phi_{ht-1}}{\phi_{ht} \phi_{ht-1}} \right)$$

Asimismo, la función de producción tiene rendimientos constantes a escala, por lo que para cada industria h van a existir un número indeterminado de empresas. Las ganancias para cualquiera de esas empresas, por competencia perfecta, serán cero, lo que implica que el precio es igual al costo marginal, es decir $p_h = [(w_h/\phi_h) + \gamma_h]$ o bien $w_h = \phi_h(p_h - \gamma_h)$.

Debido a la función de producción, todas las industrias son iguales, independientemente de su grado de especialización, por lo que si la demanda es igual por cada bien, de acuerdo a la función (5), entonces los precios y su producción serán los mismos para cualquier industria h .

Nuevas actualizaciones: La función de producción de cada empresa de actualización tecnológica será $\phi = \min(L_{kID}/A)$, con $k = 1, 2, \dots, K$, donde K son las especializaciones. Como la función de producción tiene rendimientos constantes a escala, podemos entonces referirnos a la industria de investigación y desarrollo (ID), por lo que $L_{ID} = \sum_{j=1}^K L_{kID}$ será el tiempo total de trabajo en el periodo completo para la ID, cuyos trabajadores L_{ID} se dedican a mantener actualizadas a las empresas. Las empresas de actualización maximizarán su producto, sujetas a la demanda, es decir sujetas a que se cumpla la ecuación (8), en cuyo caso sus ganancias serán también de cero, y el precio será igual al costo marginal, por lo que $\gamma = Aw$. Sustituyendo la igualdad anterior en las ecuaciones de salarios y precios, tenemos que $(w/p) = [\phi/(1 + \phi A)]$.

Jóvenes: Los jóvenes se dedican a aprender con objeto de especializarse, ya sea en las $N + Q$ especialidades y/o en investigación y desarrollo (ID). Los jóvenes que se dedican a ID aprenden los conocimientos del periodo (K_{t-1}), y un sector se dedica a investigar todas las especializaciones para actualizar la tecnología de los $N + Q$ bienes, y otro sector desarrolla los nuevos productos Q . El número de personas dedicadas a las especializaciones o a ID dependerá de K_{t-1} y de las oportunidades a corto plazo, pero en el largo plazo las ganancias de todas las empresas serán cero. La implementación de las actualizaciones es igual para las empresas existentes así como para las de nuevos productos. Suponemos que el costo de aprendizaje, especialización e investigación son iguales, medido en términos de su consumo, que lo solventan sus padres, por lo que no aparece de forma explícita.

Equilibrio estático: El ingreso del padre va a provenir del trabajo que realice en cualquiera de las empresas de las $N + Q + 1$ industrias, de tal forma que para todo $i \in S$, entonces $E_i = w$, pues $L_i = 1$. Bajo este escenario, el pago total al trabajo será la suma del salario por el número de trabajadores de las $N + Q + 1$ industrias, es decir:

$$\sum_{i=1}^{N+Q} wL_i^d + wL_{ID}^d = w \left[\sum_{i=1}^{N+Q} L_i^d + L_{ID}^d \right] = w[L^d + L_{ID}^d] = wL$$

donde L es el número de padres, que también es la oferta de empleo total, que es fija. La igualdad anterior implica que el mercado de trabajo está en equilibrio. Como todos los individuos ganan el mismo salario y los bienes tienen el mismo valor, la demanda total de los $N + Q$ bienes se puede expresar como $L \sum_{i=1}^{N+Q} p_i x_i = LE = wL$. Para conocer el equilibrio en cada industria igualamos la demanda total de cada bien (5) a su oferta (11), por lo que $[EL/(N + Q)p] = \emptyset L_i^d$. Sustituyendo el precio y despejando L_i^d , teniendo en cuenta que $E = w$ y que $(N + Q)L_i^d = L^d$ tenemos que $L = (1 + \emptyset A)L^d$. La producción de los bienes de consumo es, con los precios iguales a p y la ecuación anterior:

$$\sum_{i=1}^{N+Q} p_i x_i = pL^d \phi = \frac{(1 + \phi A)}{\phi} wL^d \phi = w(1 + \phi A)L^d = wL$$

que implica que la producción total es igual al gasto total e igual a los ingresos de todas las familias. lo que implica que el mercado de bienes está en equilibrio. La función indirecta de utilidad para la familia representativa será:

$$(9) \quad V = (N + Q)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{w}{p}\right) = (N + Q)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{\phi}{1-A\phi}\right)$$

que es creciente tanto en el número de bienes como en las actualizaciones, que será la forma de medir el crecimiento económico.

Equilibrio dinámico. —El equilibrio dinámico, tal como está planteado el modelo, será simplemente la sucesión del capital de conocimientos K_t , que dependerá del capital en el periodo anterior, K_{t-1} y del grado de investigación, que estará en función tanto de la posibilidad de las actualizaciones (ecuación 8) como de los nuevos productos.

V. B. Factores de influencia sobre la función de utilidad factorial de las comunidades indígenas.

Supondremos ahora que dentro de la sociedad (S) existe otra comunidad de tamaño pequeño, precio aceptante, la cual denotaremos como (I).

Construcción de la FUF para el caso de los indígenas. — La FUF que se va a utilizar para representar las preferencias del individuo representativo de la sociedad I , se basa en la ecuación (2), a la cual añadiremos los supuestos que se derivan del caso específico que estamos analizando. Los FIs, como ya se mencionó, serán sobre la aversión a la especialización del trabajo y la preferencia por la tecnología tradicional. Lo primero que hay que considerar para la construcción de la FUF es que la evidencia empírica muestra que los FIs no afectan los $N + Q$ bienes de consumo, por lo que es posible representar el incremento de la utilidad como una función aditiva, es decir, para cualquier factor j , $\Delta u_j = u_j - u_p =$

$u_p + f(\cdot) - u_p = f(\cdot)$, donde $f(\cdot)$ sería una la función que representa la influencia del factor j .

El primer FI es la *aversión a la especialización económica*, que indica que todos los padres de la comunidad I van a preferir menor especialización, es decir, $L_{h-1} > L_h$, donde h es la industria, pero también el número de especialidades en dicha industria. La aversión a la especialización puede ser representada por alguna función decreciente en la especialización, como $\Delta u_1 = Z \left[A_h - \frac{h^2}{2} \right]$, donde Z es el grado de importancia del factor, o el grado de tradicionalidad de la sociedad I , y A_h un parámetro tal que, si h es pequeña, la utilidad será positiva, pero si h es grande, la utilidad sería negativa.

El segundo factor es la *aversión a la tecnología actualizada*. El aumento neto en la utilidad lo definimos como: $\Delta u_\phi = Z \left[A_\phi - \frac{\phi_I^2}{2} \right]$, donde ϕ_I es la tecnología de la sociedad I , Z el grado de tradicionalidad y A_ϕ un parámetro tal que, para valores pequeños de ϕ_I la utilidad será positiva, y para valores altos de la actualización, la utilidad sería negativa. Asimismo, todas las actualizaciones ϕ_{t-j} que produzcan beneficios netos menores a la última actualización ϕ_t tendrán un precio de cero, pues su demanda será nula, lo que implica que si se utiliza una tecnología con precio nulo, entonces $\phi_I \leq (w/p)$. Por último, suponemos que si una empresa en la industria $h > 1$ (con especialización) es formada por individuos de la comunidad I , ellos podrán escoger la tecnología usada, pero si en esa empresa hay uno o más individuos de la sociedad S , la tecnología será la más actualizada. Agregando los FIs descritos, de acuerdo a la función (2), la FUF quedaría de la siguiente forma:

$$(10) \quad u_{If} = \left[\sum_{i=1}^n x_i^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} + Z \left[A - \frac{h^2}{2} - \frac{\phi_I^2}{2} \right]$$

donde $A = A_L + A_\phi$. Dado que los FIs no cambian la tasa marginal de sustitución de los bienes de consumo, se puede sustituir la función indirecta de utilidad (9) en la función (10), con lo cual tenemos el programa de maximización:

$$(11) \quad \max_{L, \phi_I} V = B\phi_I + Z \left[A - \frac{h^2}{2} - \frac{\phi_I^2}{2} \right]$$

donde $B = (N + Q)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$. El resultado es que la sociedad I se dedicará por entero a producir $h = 1$, lo cual es posible dado que estamos suponiendo que la comunidad I es pequeña en relación a la S , por lo que su oferta total del bien $h = 1$ no será mayor a la demanda. Este resultado se debe a que a los individuos de la sociedad I prefieren producir sin especialización y los individuos de la sociedad S son indiferentes en el tipo de actividad productiva. Por competencia, el precio de $h = 1$ no puede ser mayor a p , por lo que la afección en el ingreso de los FIs se iría directamente al salario. Al maximizar (11) respecto a ϕ_I , el resultado será una tecnología $\phi_I^* = (B/Z)$ con un límite superior dado por $\phi_I^* \leq (w/p)$. Sustituyendo el resultado anterior en (11) tenemos la función indirecta de utilidad de los integrantes de la sociedad I :

$$(12) \quad V_I = \frac{1}{2} \frac{B^2}{Z} + Z \left(A - \frac{1}{2} \right)$$

que aumentará debido a la existencia de más productos, pero no con las actualizaciones de la sociedad S , debido a que la disminución de precios por la actualización tecnológica se compensa por la disminución en el precio de $h = 1$, que es el bien que producen y venden.

Tanto el equilibrio estático como el dinámico se garantizan dado que la única diferencia con el modelo sin comunidad indígena es que el ingreso será menor para los integrantes de I , pues $\phi_I^* < (w/p)$ y habrá más gente dedicada a producir ese bien, pues los padres de la comunidad I que la produzcan no estarán en la FPP. Sin embargo, como el número de bienes tiende a aumentar cada periodo, la demanda de $h = 1$ irá disminuyendo hasta que la oferta de los bienes de esa industria, producidos por la sociedad I supere a la demanda, en cuyo caso los integrantes de la sociedad I tendrán que formar empresas. Asimismo, dado que su tecnología es inferior a la utilizada por la sociedad S , la sociedad I no estará interesada en pertenecer al sector ID dado que ya existen las actualizaciones tecnológicas que ellos van a

usar, además de que ese sector necesita trabajadores especializados. Por último, dos puntos muy importantes para concluir el modelo son el análisis del bienestar, con objeto de evaluar si están o no en un óptimo de Pareto y la discriminación hacia estas sociedades, en donde se muestra que también se podría examinar como un FI.

Bienestar. — Como los FI están internalizados, es decir, están en su función de utilidad, cada padre de la sociedad indígena estará maximizando su utilidad sujeta a los precios y a su dotación de trabajo, es decir, los padres de I están produciendo $h = 1$ y al maximizar respecto a Φ_I no se afecta a ningún otro individuo, por lo que están en un óptimo de Pareto. No están en la FPP, pero dadas sus preferencias, están dispuestos a disminuir su consumo por un tipo de vida que incluya sus FI.

Discriminación. — Para el modelo, vamos a entender discriminación como un FI tal que cualquier $i \in S$ no le gusta trabajar junto con algún $i \in I$, aunque está dispuesto a hacerlo por un salario mayor. La fuente del FI proviene desde la época novohispana, pues la sociedad de aquella época estaba formada por castas, con los indígenas en el peldaño inferior (Israel 1975). No se derivará el FI sobre la discriminación a partir de una FUF, simplemente se supondrá que el salario de cualquier persona de S que trabaje con personas de I será $w_S^I = w(1 + \delta_S)$ y para cualquier persona de I que trabaje con S será $w_I^S = w(1 - \delta_I)$, de tal forma que lo que se le quita a los $i \in I$ compense lo que se les da a los $i \in S$.

VI. Análisis del Modelo

El modelo ya se puede utilizar para realizar el análisis entre cultura y crecimiento económico que no podría efectuarse sin un modelo formal. En primer lugar se muestra la relación empírica entre el grado de tradicionalidad y el ingreso de cada etnia, con objeto de mostrar la relación entre cultura y pobreza. Posteriormente se analiza el grado de tradicionalidad Z como una variable endógena al modelo, y la reacción de las comunidades indígenas ante dichos cambios.

Tradición versus ingreso. — De acuerdo al modelo, una disminución en el grado de tradicionalidad (Z) implicaría un mayor ingreso, pues $(\partial\Phi_I/\partial Z) < 0$. Para analizar esta

relación, se incluyeron las etnias indígenas más importantes, las cuales representan una proporción superior al 95 por ciento de todos los indígenas en México. A continuación se explica el indicador que se va a utilizar como aproximación del grado de tradicionalidad.

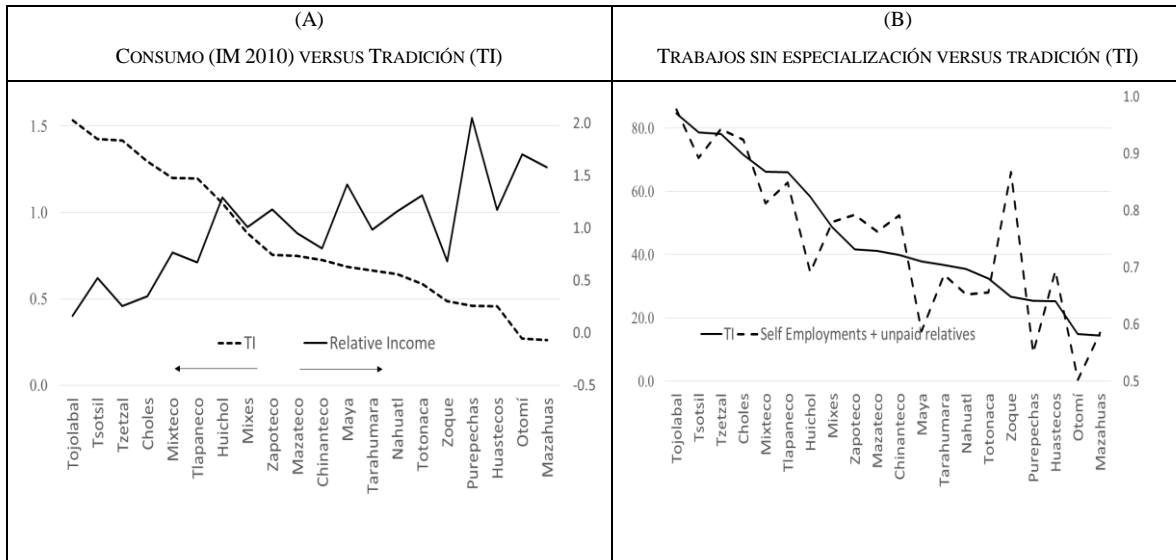
De acuerdo a la clasificación que estamos usando en este trabajo, una persona perteneciente a la etnia *i* si habla el dialecto *i*. En la mayoría de las comunidades indígenas rurales, el dialecto es la principal forma de comunicación, por lo que la primera lengua que aprenden los niños es la autóctona. Algunas etnias continúan profundizando en el uso del dialecto en los niños, por lo que aprenderán español hasta que asistan a la escuela, que es bilingüe, mientras que otras etnias fomentan el aprendizaje del español desde antes que entren a la escuela. La intención de profundizar en el uso del dialecto depende fundamentalmente de un objetivo, que es la transmisión de la cultura.

Esa intención de profundizar en el aprendizaje del dialecto la utilizaremos como aproximación al grado de tradicionalidad *Z*. La gran ventaja de este indicador es que no depende del ingreso corriente,¹³ ni de la asistencia a la escuela, ni de la tasa de fecundidad ni de la migración. Depende más bien de qué tan importante sea la transmisión de la cultura. Denominamos el Índice de Tradicionalidad (TI) como la intención de los padres y de la comunidad en general de transmitir el lenguaje autóctono a los niños. Para medirlo, se calculó la proporción de niños de entre 3 y 6 años de edad que hablan lengua indígena y no hablan español, en comunidades indígenas rurales, por etnia.

Como medida del ingreso medio, se utilizó el reportado en el Censo 2010, por etnia, en relación al ingreso promedio de todas las comunidades indígenas analizadas, al que denominaremos como I2010. Como se puede observar en la gráfica 1.A, la relación entre el IT y el I2010 es negativa, como se esperaba y cuya correlación es del 75 por ciento en términos absolutos. Esta prueba se realizó con otras medidas del ingreso afines, como el Índice de Marginalidad, y los resultados fueron similares.

¹³ La desaparición de una lengua o al menos la reducción en su uso es una cuestión que puede llevar varias generaciones, y depende principalmente de factores culturales y políticos (Wurm, 1991).

GRÁFICA 2



Source: Censo 2010.

En el mismo sentido, también existe una relación entre el IT y la ausencia de especialización, que se mide con la proporción de trabajadores por cuenta propia y familiares sin pago, por municipio indígena, de acuerdo a la etnia, cuyo resultado se puede observar en la Gráfica 2.B, siendo la correlación del 75 por ciento.

Lo que indica la Gráfica 2.A es que el grado de tradicionalidad puede explicar en buena medida las discrepancias del ingreso relativo entre etnias y el diferencial entre el ingreso de indígenas versus no indígenas. Con ello, se puede afirmar que la cultura, a través de los FIs es un causal de pobreza, que es lo que se propuso al principio de la sección IV.

Crecimiento económico de las sociedades indígenas. — Si la economía indígena se encuentra en un óptimo de Pareto, significa que está usando eficientemente sus recursos, de acuerdo a sus preferencias, que incluyen sus FIs. Sin embargo, esta economía no genera crecimiento económico, pues no desarrolla nuevos bienes, ni actualiza la tecnología, por lo que su crecimiento económico dependerá del crecimiento de la sociedad S , aunque siempre será menor. De acuerdo al modelo, esta diferencia entre el crecimiento económico de ambas

sociedades depende del grado de tradicionalidad (Z), que hasta el momento lo hemos supuesto constante. Sin embargo, es de esperarse que el grado de tradicionalidad haya cambiado. Si comparamos los resultados de un estudio sobre las sociedades indígenas mexicanas que se llevó a cabo en los años treinta (Basauri, 1940) con los datos del Censo 2010, podremos observar que el uso de la lengua autóctona se ha reducido para todas las etnias, aunque de forma diferente, lo que es un indicativo de que Z también lo ha hecho. Por ello, analizaremos a continuación el comportamiento de esta variable como endógena al modelo.

El grado de tradicionalidad como variable endógena. — Seguir los FIs tiene un costo de oportunidad, que se puede medir a través del diferencial de ingresos entre la sociedad I y la sociedad S . Si Z fuera una función del diferencial de ingresos, entonces Z sería una variable endógena en el modelo. Supongamos que $Z = \theta(\phi_I/E_S)$, de tal forma que, mientras mayor sea el diferencial entre ingresos (E_I/ϕ_S), la variable Z disminuirá en una magnitud θ , por lo que este último parámetro indicaría la sensibilidad de la reacción de la sociedad I ante los cambios en el diferencial de ingreso. Sustituyendo Z en la ecuación (11), suponiendo $h = 1$ y maximizando respecto a ϕ_I tenemos:

TECNOLOGÍA ÓPTIMA	GRADO DE TRADICIONALIDAD ÓPTIMO
$\phi_I^* = \left[\frac{BE_S + \theta \left(A - \frac{1}{2} \right)}{\frac{2}{3}\theta} \right]^{\frac{1}{2}}$	$Z^* = \left[\frac{3}{2} \frac{\theta}{E_S} \left[B + \frac{\theta}{E_S} \left(A - \frac{1}{2} \right) \right] \right]^{\frac{1}{2}}$

Si sube el ingreso de los individuos pertenecientes a la sociedad S (E_S), entonces la tecnología del sector indígena también lo hará, y Z disminuirá. Nótese que, conforme θ sea menor, también lo será la intensidad de los cambios de la comunidad indígena ante cambios en E_S . De esta forma, θ reflejará qué tan renuentes son las etnias para modificar su grado de tradicionalidad.

Al comparar el mismo estudio de los años treinta con los datos del censo 2010 se puede observar que el diferencial de ingresos ha crecido de forma significativa, y ha tenido un

comportamiento diferente entre etnias. En este sentido, al aumentar el diferencial de ingresos, el grado de tradicionalidad se reduce, y la comunidad *I* buscará aumentar su ingreso. La forma de hacerlo, de acuerdo a la ecuación (13) sería actualizando la tecnología, pero también existen otras formas, como creando empresas *ad hoc*, o bien migrando de forma temporal o permanente. Las formas de reaccionar de las comunidades indígenas ante la disminución de *Z* se analizan a continuación.

Actualización de la tecnología. — Se pueden observar diferencias significativas en la forma de producción que tenían las comunidades indígenas en la década de los años treinta respecto a las actuales, aunque esas diferencias dependen del producto: por ejemplo, en textiles la diferencia no es mucha, pues en la actualidad se siguen usando telares manuales (Giovannini, 2015), pero en la producción de artículos de madera, la diferencia es grande, pues actualmente usan herramienta relativamente moderna. En la agricultura la tecnología era muy parecida en los años treinta, pero actualmente se pueden observar diferencias inter e intra etnias respecto a la tecnología y hasta en los canales de distribución.

Empresas indígenas. — La evidencia empírica muestra la ausencia de empresas neoclásicas en las comunidades indígenas, pero muchas de estas comunidades se organizan en asociaciones o cooperativas de producción con objetivos múltiples, ya sean económicos, ecológicos, culturales, y/o para reducir costos de distribución, (Giovannini, 2015), algunas de las cuales son empresas exitosas (Klooster and Mercado-Celis, 2016). Las empresas más comunes entre las comunidades indígenas son las de producción agrícola, que se integraron como comunidades, con tierra comunal y parcelada, como se mencionó al final de la sección IV.B. En algunos casos es posible encontrar cierta especialización económica en este tipo de empresas, pero en su mayoría los trabajadores continúan trabajando sin especialización económica. En consecuencia, la función de producción de este tipo de empresas es diferentes a la que hemos usado (ecuación 6), pues combinan una pequeña proporción de trabajo con especialización con trabajo sin especialización. El problema es que, al ser diferente su función de producción, no necesariamente pueden usar eficientemente las actualizaciones tecnológicas existentes, y las empresas de investigación dedicada a actualizar la tecnología de las empresas indígenas no serían rentables, debido al tamaño pequeño de la sociedad *I* y

a sus bajos ingresos, por lo que estas asociaciones y cooperativas están restringidas a unos pocos tipos de bienes sin especialización. Por ejemplo, el diseño de sus artesanías tiende a ser estático, pues sus productos siguen siendo mayoritariamente ornamentales, lo cual se debe, en buena medida, a que la actualización en el diseño de productos que los indígenas puedan vender en la sociedad S podría ser muy difícil, debido a la diferencia de culturas.

Migración. — Podemos dividir la migración en dos tipos; temporal y permanente. De acuerdo al Censo 2010, la mayoría de los pueblos indígenas que están relativamente cerca de algún centro económico migran temporalmente, de tal forma que combinan el trabajo en sus pueblos, sin especialización, con trabajo especializado fuera de la comunidad. Esta situación se puede analizar extendiendo el modelo que hemos presentado, en donde se podrá apreciar que estas comunidades tienen un crecimiento económico por actualizaciones tecnológicas. Supongamos que los integrantes de la comunidad I tiene la oportunidad de decidir si trabajan una parte de su dotación de trabajo en empresas con especialización, en cuyo caso sus ingresos serán de $(w/p)l$, donde l es el tiempo dedicado a trabajar en ese tipo de empresas, y trabajar en la comunidad, en empresas de la industria $h = 1$, cuyo ingreso sería $\phi_I(1 - l)$, pues la dotación total de trabajo es la unidad. En este caso, el programa de maximización será:

$$(12) \quad \max_{l, \phi_I} V = \left[B \left[\phi_I(1 - l) + \left(\frac{w}{p}\right)(1 - \delta_I)l \right] \right] + \left[A - \frac{Z}{2}l^2 - \frac{Z}{2}\phi_I^2 \right]$$

con respecto a l y a ϕ_I , y donde $Z \in [0, \infty)$. Al maximizar (12) respecto a l y a ϕ_I , el resultado es:

OFERTA DE TRABAJO FUERA DE LA COMUNIDAD	TECNOLOGÍA USADA EN LA COMUNIDAD
$1 - l^* = Z \left[\frac{B \left(\frac{w}{p}\right) (1 - \delta_I) - Z}{B^2 - Z^2} \right]$	$\phi_I^* = B \left[\frac{B \left(\frac{w}{p}\right) (1 - \delta_I) - Z}{B^2 - Z^2} \right]$

Suponemos además que existen muchos bienes, de tal forma que B es un número grande respecto a Z y a $\left(\frac{w}{p}\right)(1 - \delta_I)$. Nótese que si $Z = 0$, lo que implicaría la ausencia de FIs, entonces $\phi_I^* = \frac{w}{p}$ y $1 - l^* = 0$. Por otro lado, si $Z \rightarrow \infty$, entonces $1 - l^* = 1$ y $\phi_I^* = 0$. Asimismo, $(\partial\phi_I^*/\partial Z) < 0$ y $(\partial(1 - l^*)/\partial Z) < 0$, lo que quiere decir que mientras menor sea el grado de tradicionalidad, más tiempo trabajarán en una empresa de alguna industria con especialización.

Este resultado explica la Gráfica 1B, en donde se relaciona el grado de tradicionalidad con la proporción de personas que trabajan por cuenta propia. Los resultados son interesantes pues combinan la esfera económica, representada por la escala de consumo B y el ingreso $(w/p)(1 - \delta_I)$, con la cultura, medida por el grado de tradicionalidad Z . Bajo este esquema, la economía indígena estará creciendo ya no solo por los nuevos bienes, sino también en una proporción $1 - l^*$ de lo que crece la economía S por concepto de su actualización económica.

Respecto a la migración permanente o por periodos largos, la evidencia muestra que ha aumentado, principalmente a centros económicos de México (Acharya and Barragán, 2012) como de EEUUA, tanto en número de migrantes, como en su distribución geográfica y por etnias (Fox and Rivera-Salgado, 2004). Sin embargo, de acuerdo al modelo, si los individuos de las comunidades indígenas tienen internalizada la cultura y están en un óptimo de Pareto, entonces ¿por qué migran de forma permanente? Migrar afecta de forma importante a sus FIs, pues tienen que trabajar en una industria con especialización y con una tecnología actualizada. Obviamente se podría pensar que sus ingresos son tan bajos que si quieren aumentarlos tienen que migrar, pero en ese caso podrían también adoptar una tecnología actualizada y aumentar su ingreso, o migrar temporalmente, disminuyendo la participación de su cultura en su función de utilidad, pero no anulándola.

La respuesta podría estar en que las personas que migran permanentemente realmente no tienen internalizados los FIs, pero los siguen dentro de la comunidad como una restricción, por lo que migrar sería la solución óptima. La cultura, analizada a través de los FIs como restricción se mostró en el epígrafe III.B. Para examinar esta situación, supongamos que la

cultura dentro de la comunidad indígena indica que deben trabajar sin especialización económica y con una tecnología sin actualización, por lo que el individuo maximizará la ecuación (10) sujeta a que $h_R = 1$ y $\phi_I \leq \phi_{IR}$, donde ϕ_{IR} es la tecnología más actualizada que pueden usar, y si no cumplen con ambas restricciones podría recibir un castigo tal que le conviene seguirlas. Si el individuo no tiene internalizados los FIs, de tal forma que $Z = 0$, entonces su utilidad indirecta sería $V_R = B\phi_{IR}$. Si V_M fuera la utilidad indirecta de migrar, también con $Z = 0$, entonces $V_M = B(w/p)(1 - \delta_I)$, por lo que, si la discriminación no es muy alta, $V_R < V_M$, en cuyo caso estaría dispuesto a migrar. A lo anterior hay que añadir que actualmente, el costo de migrar ha disminuido, pues los migrantes utilizan redes sociales, con ayuda no solo de paisanos que ya migraron, sino también de asociaciones que se han creado para que el cambio sea menos costoso en términos de su utilidad (esta situación se analiza con profundidad en el libro editado por Fox and Rivera-Salgado, 2004).

VII. Conclusiones

En este trabajo se ha analizado la relación entre cultura y economía, con el propósito de explicar la situación de pobreza de las comunidades indígenas de México, a través de un modelo de crecimiento económico, en donde la fuente principal del bajo crecimiento son factores culturales. La diferencia con otros trabajos que han abordado la relación entre cultura y economía ha sido la forma de precisar la cultura, que se interpreta aquí como factores de influencia sociales (FIs) que afectan a la función de utilidad y/o las restricciones del individuo, lo cual tiene la gran ventaja de poder incorporar a la cultura en modelos formales de la teoría económica. Para ello se explicó y se formalizó en el apéndice la forma a través de la cual se incorporan esas influencias sociales, y con ello se derivó formalmente la Función de Utilidad Factorial (FUF), que es una función de utilidad que incorpora de forma explícita factores sociales. En el caso concreto de las comunidades indígenas de México, los FI internos han sido la ausencia de especialización económica y el uso de tecnología tradicional, mientras que el FI externo ha sido la discriminación.

Las principales conclusiones respecto a la relación entre cultura y economía son, primero, que a través de la FUF se evita el problema de la definición de cultura y segundo, que la FUF es una herramienta que permite introducir a la cultura en los modelos matemáticos y realizar

una interpretación formal de los componentes culturales y su relación con otras variables. En el caso de las comunidades indígenas de México, sus FIs se dedujeron a partir de datos del Censo Económico 2010 de México y de fuentes etnográficas, se presentó su origen y evolución a través de la historia y se integraron al modelo de crecimiento económico. Con ello, ha sido posible analizar la influencia de los FIs sobre su crecimiento económico y llegar a resultados que difícilmente se podrían obtener sin un modelo formal.

Por último, el modelo de crecimiento económico que se presentó muestra, al igual que otros modelos similares, que el aumento del conocimiento es la única forma de crecer, por lo que, como menciona Joel Mokyr en su libro *Culture of Growth*, la cultura dirigida al desarrollo del conocimiento para transformar la economía es el motor del crecimiento económico. Las culturas indígenas en México han mostrado una gran capacidad organizativa para defenderse de una sociedad que los ha discriminado, una gran habilidad de adaptación que finalmente los ha llevado a sobrevivir. Sin embargo, ello no se observa en la parte económica. De hecho, si suponemos que los FI están internalizados en su función de utilidad, las comunidades indígenas se encuentran en un óptimo de Pareto, pero no crecen.

Apéndice. Existencia de la Función de Utilidad Factorial

Sea $X \subseteq \mathbb{R}_+^L$ un conjunto cerrado y convexo de bienes y servicios, horas y tipo de trabajo, etcétera. Sean $x \in X$ canastas o grupos de bienes de tamaño L y definimos un factor de influencia como cualquier circunstancia identificable por el individuo que afecte su ordenación de preferencias, pero no los supuestos básicos sobre su ordenación. Suponemos que sobre el conjunto X existe una $n + 2$ relaciones de preferencias: la original o primitiva \succsim_p que no considera ningún factor de influencia, n relaciones de preferencias \succsim_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, en donde cada una de ellas es la relación de preferencias primitiva influenciada por el factor i . Al respecto, suponemos que todas las relaciones de preferencias cumplen con los supuestos básicos.¹⁴ El que las ordenaciones de preferencias considerando cada factor contengan la relación de preferencias primitiva es precisamente para conservar los supuestos básicos y poder realizar las comparaciones, pues en caso contrario sería poco creíble que cada factor de influencia, por sí solo, pueda formar una relación de preferencias que cumpla con los supuestos básicos. Por último, sea la relación de preferencias final \succsim_f , que es la relación de preferencias considerando todos los FI.

En algunos casos el factor i y el j con $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq j$ pueden ser incompatibles entre sí, o el factor i y el j pueden ser interdependientes, en cuyo caso el factor i podría afectar tanto a \succsim_i como a \succsim_j , o dependientes, es decir, para que exista i se necesita j , etcétera. Para facilitar la explicación, vamos a definir el vector Z , de tamaño n , donde si $Z_i = 1$ es que el factor i está activo, mientras que si $Z_i = 0$ no lo está. En caso de que dicho factor esté activo, afectará la relación de preferencias \succsim_i y posiblemente otras FI. Obviamente, para dos canastas $x, y \in X$, si $Z = \mathbf{0}$ (i.e., $Z_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$) entonces $x \succ_p y \Rightarrow$

¹⁴ **Completeness:** for all $x, y \in X$, $x \succsim y$ or $y \succsim x$

Transitivity: for all $x, y, z \in X$, if $x \succsim y$ and $y \succsim z$, thus $x \succsim z$

Continuity: for all $x \in \mathbb{R}_+^n$, at least as good as set $\succsim(x)$ and no better than set $\preceq(x^0)$ are closed in \mathbb{R}_+^n

Strict monotonicity: for all $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, if $x \geq y$ thus $x \succsim y$; and if $x > y$ thus $x \succ y$.

$\mathbf{x} \succ_i \mathbf{y}$, para la relación primitiva y con $i = F, 1, 2, \dots, n$. Por último, $\mathbf{Z}(h)$ con $h \in [0, n]$ indica que los primeros h factores están activos.

Basados en el Teorema de la Existencia de la Función de Utilidad (Jehle and Reny, 2000), a cada relación de preferencias se le puede asignar una función de utilidad $u_f(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$, $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$ y $u_p(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, y donde el vector \mathbf{Z} indicará los FI activos. Por ejemplo, $u_i[\mathbf{Z}(1), \mathbf{x}]$ puede ser diferente a $u_i[\mathbf{Z}(h), \mathbf{x}]$, con $h > 1$, lo que estaría reflejando la relación con los demás factores, o bien que el factor 1 no influya en las preferencias a menos que esté activo el factor 2, en cuyo caso $u_1[\mathbf{Z}(1), \mathbf{x}] = u_p$, pero $u_1[\mathbf{Z}(2), \mathbf{x}] \neq u_1[\mathbf{Z}(1), \mathbf{x}]$.

Definición 1. Inter-comparaciones totales. Para permitir una inter-comparación total, solamente se van a permitir transformaciones monótonicamente crecientes e iguales para todas las funciones de utilidad, es decir, $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) > u_i(\mathbf{y}, \mathbf{Z})$ si y solo si $\emptyset[u_i(\mathbf{x}, \mathbf{Z})] > \emptyset[u_i(\mathbf{y}, \mathbf{Z})]$ para $i = p, f, 1, \dots, n$, donde \emptyset es cualquier transformación monótonica positiva (*intra-individual full cardinal comparisons*; ver Bossert and Weymark, 2004). Esto es lo mismo que suponer que el vector usado para construir la función de utilidad es el mismo para todas las funciones de utilidad, el cual generalmente es el vector unitario $\mathbf{e} \equiv (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}_+^L$. Con ello podemos definir las intra-comparaciones:

Definición 2. Comparación entre la misma canasta bajo diferentes factores. La expresión $(\mathbf{x})_i^h > (\mathbf{x})_j^h$ significa que la canasta \mathbf{x} influenciada por el factor i es preferida sobre la misma canasta \mathbf{x} influenciada por el factor j , dados otros h factores activos.

Proposición 1. Utilidad Equivalente. Sea $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]$ y $u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)]$, con $i, j = 1, 2, \dots, n$ y $h \in (0, n - 2)$ y $i \neq j \neq h$ dos funciones de utilidad valuadas en la misma canasta $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, en donde $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]$ considera, además de los h factores activos, al factor i , y la función $u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)]$ considera, además de los h factores activos, al factor j . Existe una función continua $c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)]$, la cual la vamos a denominar como la *utilidad equivalente* tal que $c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)] = u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)] - u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)]$, donde $c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)]$ representa la diferencia, en términos de utilidad, entre el factor i y el factor j , dados otros h factores activos

sobre el vector \mathbf{x} . Esto es, $c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)] > 0$ si y solo si $(\mathbf{x})_i^h > (\mathbf{x})_j^h$.

Demostración. Primero se demostrará que si $(\mathbf{x})_i^h > (\mathbf{x})_j^h \Rightarrow c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)] > 0$. De acuerdo con el Teorema de la Existencia de la Función de Utilidad, es posible asignar una función de utilidad $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]$, $\mathbb{R}_+^L \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = f, p, 1, 2, \dots, n$ para cada relación, tal que $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]\mathbf{e} \sim \mathbf{x}$, donde \mathbf{e} , ya definido, es el vector unitario, y lo mismo para $u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)]$. Si los factores de influencia i y j están activos, dados otros h factores de influencia, entonces, sin pérdida de generalidad, si $(\mathbf{x})_i^h > (\mathbf{x})_j^h$ entonces $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]\mathbf{e} \succ (\mathbf{x})_i > (\mathbf{x})_j \sim u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)]\mathbf{e}$, y $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]\mathbf{e} > u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)]\mathbf{e}$, con $c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)] > 0$.

Ahora probaremos el recíproco, es decir, $c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)] > 0 \Rightarrow (\mathbf{x})_i^h > (\mathbf{x})_j^h$. Sabemos que si $c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)] > 0$, entonces $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)] > u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)]$, por lo que, por el recíproco del Teorema de la Función de Utilidad, $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]\mathbf{e} \succ u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)]\mathbf{e}$, lo que implica que $(\mathbf{x})_i^h > (\mathbf{x})_j^h$. Por último, Como la adición de funciones continuas es otra función continua (Apostol 1974, Theorem 4.18), entonces $c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)]$ es una función continua.

Nótese que $(\mathbf{x})_i^h > (\mathbf{x})_j^h$ no es una relación de preferencias, ni $c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)]$ refleja el orden de dicha relación, pues no necesariamente cumplen con los supuestos básicos. Son simplemente las comparaciones entre dos estructuras de preferencias. El que podamos trabajar con ellas se debe a que, si $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)] > u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)] \Rightarrow c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)] > 0$ por estar ambas funciones de utilidad en la recta real, y $c_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)] > 0 \Leftrightarrow (\mathbf{x})_i^h > (\mathbf{x})_j^h$ por la comparabilidad total, es decir, en cada punto $\mathbf{x} \in X$ pasan $n + 2$ curvas de nivel. Si la curva de nivel de i reporta una utilidad mayor a la de j , es decir, $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)] > u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)]$, entonces, $(\mathbf{x})_i^h > (\mathbf{x})_j^h$ y se dice que la canasta \mathbf{x} es preferida a ella misma bajo el factor i que bajo el factor j .

Por la proposición de la utilidad equivalente, cada función de utilidad $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]$ se define como $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)] = u_p(\mathbf{x}) + c_{ip}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]$, donde $c_{ip}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]$ es la utilidad

equivalente entre la utilidad primitiva $u_p(\mathbf{x})$ y la utilidad primitiva junto con el factor i , $u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]$.

Proposición 2: Agregación de factores. La función de utilidad considerando los factores i y j , dados otros h factores activos para $i, j = 1, 2, \dots, n$ se define como:

$$u_{ij}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, j, h)] = u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)] + u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)] - u_p(\mathbf{x})$$

Para el caso de la agregación de los n factores:

$$u_f[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(n)] = u_p(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(n)] - (n)u_p(\mathbf{x})$$

Demostración. Sean los siguientes conjuntos, con $y \in \mathbb{R}_+$: $A_i = \{y/y \leq u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)]\}$ y $A_j = \{y/y \leq u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)]\}$. La unión de ambos conjuntos, por definición, es $(A_i \cup A_j) = A_i + A_j - (A_i \cap A_j)$ en donde $(A_i \cap A_j) = u_p(\mathbf{x})$. Sustituyendo tenemos que $(A_i \cup A_j) = u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(i, h)] + u_j[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(j, h)] - u_p(\mathbf{x})$. Para los n factores, comenzamos con el primer factor:

$$A_1[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(1)] = (A_1) = u_1[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(1)]$$

$$A_{12}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(2)] = (A_1 \cup A_2) = u_1[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(2)] + u_2[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(2)] - u_p(\mathbf{x})$$

$$A_{123}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(3)] = (A_{p12} \cup A_3) = u_{12}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(3)] + u_3[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(3)] - 2u_p(\mathbf{x})$$

y así hasta:

$$u_f[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(n)] = (A_1 \cup A_{1-n} \cup A_n) = \sum_{i=1}^n u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(n)] - (n-1)u_p(\mathbf{x}) \blacksquare$$

A partir de las proposiciones anteriores, podemos construir la función de utilidad factorial.

Teorema (Función de Utilidad Factorial). Si existen n factores de influencia sobre la relación

de preferencias primitiva, de acuerdo a la proposición 1 y la 2, la función de utilidad $u_f(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$ será igual a $u_p(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \Delta u_i(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$, donde $\Delta u_i(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) = [u_i(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) - u_p(\mathbf{x})]$ para $i = 1, 2, \dots, n$, o alguna transformación monotónica de dicha función.

Demostración. Por la proposición 2, sabemos que

$$u_f[\mathbf{Z}(n), \mathbf{x}] = \sum_{i=1}^n u_i[\mathbf{Z}(n), \mathbf{x}] - (n-1)u_p(\mathbf{x})$$

Sumando y restando u_p , tenemos:

$$u_f[\mathbf{Z}(n), \mathbf{x}] = u_p(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \{ u_i[\mathbf{Z}(n), \mathbf{x}] - u_p(\mathbf{x}) \}$$

Recíproco. Sea $u_f[\mathbf{Z}(n), \mathbf{x}]$ cualquier función de utilidad que incluya factores de influencia como los definidos, y consideremos $u_{f(n-1)}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(n-1)]$ como la función de utilidad sin el último factor. Por la *utilidad equivalente*, existe una función tal que $c_{n(n-1)}(\mathbf{x}) = u_f[\mathbf{Z}(n), \mathbf{x}] - u_{f(n-1)}[\mathbf{Z}(n-1), \mathbf{x}]$, por lo que $u_{f_n}[\mathbf{Z}(n), \mathbf{x}] = u_{f(n-1)}[\mathbf{Z}(n-1), \mathbf{x}] + \Delta u_{n(n-1)}[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(n)]$. Repitiendo el procedimiento llegamos entonces a que $u_f(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) = u_p(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \Delta u_i[\mathbf{x}, \mathbf{Z}(n)]$ ■