

Kapitel 1

Die Maxwell'schen Gleichungen

Eine kurze Wiederholung der mathematischen Grundlagen findet sich im Kapitel 5.

1.1 Die vollständigen Maxwell'schen Gleichungen

Der vollständige Satz der Maxwell'schen Gleichungen und die Feldgrößen sind aus der Vorlesung „Grundgebiete der Elektrotechnik III“ bekannt und es werden im Wesentlichen die gleichen Bezeichnungen verwendet. Die Feldgrößen lauten

\vec{E} elektrische Feldstärke [V/m]

\vec{D} elektrische Flussdichte [As/m²]

\vec{H} magnetische Feldstärke [A/m]

\vec{B} magnetische Flussdichte [Vs/m²]

und hängen im Allgemeinen vom Ort \vec{r} und der Zeit t ab. Die Quellen der elektrischen und magnetischen Felder sind

ρ Raumladungsdichte [As/m³]

\vec{J} elektrische Stromdichte [A/m²]

1.1.1 Die Maxwell'schen Gleichungen in integraler Form

Es wird angenommen, dass alle Randkurven C und Oberflächen F ruhen, sodass relativistische Effekte vernachlässigt werden können.

1. Maxwell'sche Gleichung (Durchflutungsgesetz, Feldgleichung für \vec{H})

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_F \left(\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \cdot d\vec{F} \quad (1.1)$$

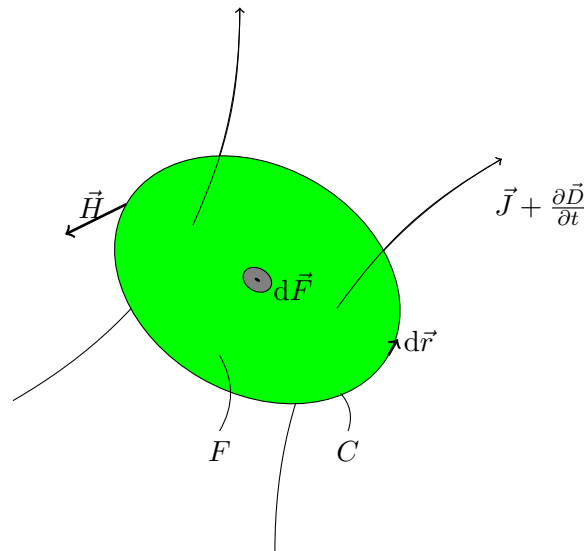


Abbildung 1.1: Durchflutungsgesetz.

2. Maxwell'sche Gleichung (Induktionsgesetz, Feldgleichung für \vec{E})

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_F \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{F} \quad (1.2)$$

3. Maxwell'sche Gleichung (Feldgleichung für \vec{D})

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{F} = \int_V \rho \, dV \quad (1.3)$$

4. Maxwell'sche Gleichung (Feldgleichung für \vec{B})

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0 \quad (1.4)$$

Die geschlossene Randkurve C spannt die Fläche F ein, wobei die beiden im mathematisch positiven Sinne zueinander orientiert sind. Die Oberfläche F schließt das Volumen V vollständig ein und ist nach außen orientiert.

1.1.2 Die Materialgleichungen in ruhender Materie

Die Materialgleichungen lauten mit der elektrischen ($\epsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$) und magnetischen ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Ns}}{\text{A}^2}$) Feldkonstanten des Vakuums

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1.6)$$

und den in Materialien definierten Größen

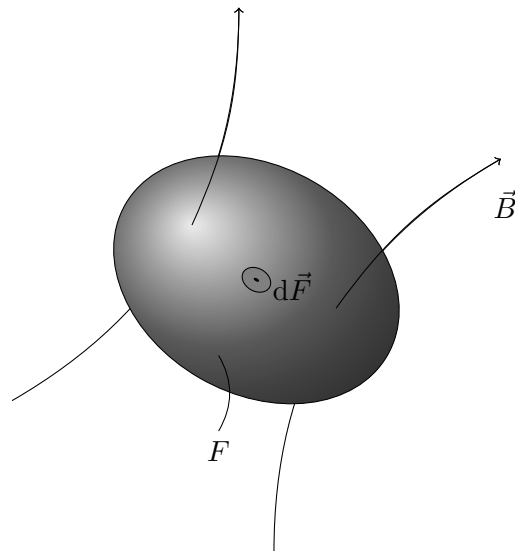


Abbildung 1.2: Die vierte Maxwell'sche Gleichung.

\vec{P} elektrische Polarisation [As/m²]

\vec{M} Magnetisierung [A/m] .

(1.1) - (1.6) gelten im Vakuum immer und bei Vorhandensein von Materie streng genommen nur so lange, wie die Feldgrößen sich auf den Abständen zwischen den Atomen bzw. Molekülen wenig ändern (\rightarrow Elektronentheorie).

Ein zu (1.5), (1.6) analoger Zusammenhang von vergleichbarer Allgemeingültigkeit lässt sich zwischen \vec{E} und \vec{J} nicht angeben. In vielen technisch wichtigen, ruhenden, linearen, isotropen Festkörpern gilt jedoch in guter Näherung

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^{(e)}) \quad . \quad (1.7)$$

Dabei werden über $\vec{E}^{(e)}$ Stromdichtekomponenten erfasst, die nicht aufgrund der Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke \vec{E} auftreten. Dies können z.B. Diffusionsströme in Halbleiterbauelementen sein. σ ist die Leitfähigkeit des Materials.

1.1.3 Die Maxwell'schen Gleichungen in Differenzialform und die entsprechenden Grenzbedingungen

Liegen außer Grenzflächen keine weiteren Singularitäten wie z.B. Punktladungen, Linienladungen, Linienströme vor, so folgt aus den Maxwell'schen Gleichungen in Integralform (1.1) - (1.4) sofort die Gültigkeit der Maxwell'schen Gleichungen in Differenzialform und der zugehörigen Grenzbedingungen.

1. Maxwell'sche Gleichung in Differenzialform und zugehörige Grenzbedingung

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} && \text{außerhalb der Grenzflächen} \\ \text{Rot } \vec{H} &= \vec{J}_F && \text{auf den Grenzflächen} \end{aligned} \quad (1.8)$$

(\vec{J}_F ist die Flächenstromdichte (Strombelag) mit der Einheit [A/m]. Mit Ausnahme eines später behandelten Spezialfalles gilt bei ruhender Materie für den Flächenstrom immer $\vec{J}_F = \vec{0}$.)

2. Maxwellsche Gleichung in Differenzialform und zugehörige Grenzbedingung

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} && \text{außerhalb der Grenzflächen} \\ \operatorname{Rot} \vec{E} &= \vec{0} && \text{auf den Grenzflächen} \end{aligned} \quad (1.9)$$

3. Maxwellsche Gleichung in Differenzialform und zugehörige Grenzbedingung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho && \text{außerhalb der Grenzflächen} \\ \operatorname{Div} \vec{D} &= \rho_F && \text{auf den Grenzflächen} \end{aligned} \quad (1.10)$$

(ρ_F ist die Flächenladungsdichte mit der Einheit [As/m²]. Sie wird in dieser Vorlesung nur auf Leitern berücksichtigt.)

4. Maxwellsche Gleichung in Differenzialform und zugehörige Grenzbedingung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 && \text{außerhalb der Grenzflächen} \\ \operatorname{Div} \vec{B} &= 0 && \text{auf den Grenzflächen} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Umgekehrt folgt unter den beschriebenen Voraussetzungen aus (1.8) - (1.11) in allen Raumpunkten sofort auch wiederum die Gültigkeit von (1.1) - (1.4) für beliebige Kurven C mit eingespannten Flächen F und beliebige Volumina V mit den Oberflächen F . In diesem Sinne sind (1.1) - (1.4) und (1.8) - (1.11) äquivalent.

Die Definition der Flächendivergenz Div (5.45) und der Flächenrotation Rot (5.46) findet man in Abschnitt 5.4. Die Flächenladungsdichte ρ_F und die Flächenstromdichte \vec{J}_F sind Idealisierungen, die in der Realität sehr hohe Dichten in sehr dünnen Schichten ersetzen. Die idealen Grenzflächen ersetzen stetige Änderungen in Materie, die oft innerhalb weniger Atomlagen stattfinden, durch abrupte Übergänge. Die Annahme solcher Idealisierung vereinfacht die Problemstellungen und ist sehr häufig gerechtfertigt.

Ferner sei noch bemerkt, dass die Maxwellschen Gleichungen nicht vollständig unabhängig voneinander sind. Bildet man die Divergenz von (1.9) auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, so folgt bei hinreichend glatten Feldern

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \vec{E} = 0 = \operatorname{div} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B}. \quad (1.12)$$

Dies entspricht aber genau der negativen zeitlichen Ableitung von (1.11).

1.1.4 Die Kontinuitätsgleichung

Bildet man die Divergenz der ersten Maxwellschen Gleichung (1.8) und benutzt (1.10), erhält man die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{H}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \vec{H} = 0 = \operatorname{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) = \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.13)$$

und somit

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (1.14)$$

Die entsprechende Grenzbedingung lautet

$$\operatorname{Div} \vec{J} + \frac{\partial \rho_F}{\partial t} = 0 . \quad (1.15)$$

1.2 Der Energiesatz

Die skalare Multiplikation von (1.8) mit \vec{E} und (1.9) mit \vec{H} außerhalb der Grenzflächen liefert nach anschließender Differenzbildung

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} . \quad (1.16)$$

Es gilt ferner mit (5.53)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) &= \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\vec{E}} \times \vec{H}) + \nabla \cdot (\vec{E} \times \overset{\downarrow}{\vec{H}}) \\ &= \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \\ &= \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} , \end{aligned} \quad (1.17)$$

wobei der Pfeil angibt, auf welche Größe des Klammerausdrucks der Nabla-Operator angewendet wird.

Insgesamt folgt daher aus (1.16), (1.17) außerhalb der Grenzflächen

$$- \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} . \quad (1.18)$$

Die Integration über ein endliches Volumen V mit der nach außen orientierten Oberfläche F ergibt somit nach Anwendung des verallgemeinerten Gaußschen Satzes und der Grenzbedingungen bei ruhenden Grenzflächen

$$- \oint_F (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{F} = \int_V \left(\vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) dV . \quad (1.19)$$

Dabei wurde die Tatsache verwendet, dass die tangentialen Komponenten der Feldstärken auf den Grenzflächen aufgrund der Grenzbedingungen stetig sind ($\vec{J}_F = \vec{0}$ und $\rho_F = 0$ auf den Grenzflächen).

Zur Interpretation des Terms $\oint_F (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{F}$ sei folgendes Beispiel betrachtet:

1.2.1 Beispiel: gerader Leiter

Gegeben sei ein Stück eines sehr langen, geraden, kreiszylindrischen, vom Strom I durchflossenen Leiters (Abb. 1.3). F_Q ist die Querschnittsfläche dieses Leiterstücks und Δl seine Länge. Die Oberfläche F hat die Form einer Dose, wobei der Deckel und Boden durch