Les Études philosophiques, No. 2, LEIBNIZ (AVRIL-JUIN 1989)
pp. 201-214

« ARS INVENIENDI » AUJOURD'HUI

> « Je ne fais pas grand cas des découvertes particulières, et ce que je désire le plus, c'est de perfectionner l'Art d'inventer, et de donner plutôt des méthodes que des solutions des problèmes, puisqu'une seule méthode comprend une infinité de solutions. »
>
> Leibniz, lettre au duc Ernst-August, *GPS*, VII, 25.

Dans son article nécrologique sur Abraham Robinson[1], Simon Kochen consignait une impression de Gödel qui ne manquera pas d'intéresser les spécialistes de Leibniz. Gödel, dont il faut rappeler l'intérêt particulier pour la philosophie de Leibniz, voyait en effet dans les travaux d'Abraham Robinson la meilleure réalisation de l'idéal leibnizien d'une logique constituée en *ars inveniendi* pour les mathématiques. Nous voudrions examiner ici à quel aspect de l'*ars inveniendi* ce jugement rend justice et quelle caractéristique de la logique contemporaine il fait ressortir. S'agissant des travaux d'Abraham Robinson, nous nous intéresserons uniquement au secteur de la théorie des modèles, bien que celui-ci ne soit pas le seul à mettre en œuvre l'idée que les résultats logiques sont propres à faciliter la découverte mathématique.

On a amplement commenté, à la lumière des résultats de la logique moderne, le projet leibnizien de « calcul universel »[2]. On a peu considéré, du point de vue de cette même logique, l'idée, essentielle à la mathématique et à la philosophie leibniziennes, que l'établissement du calcul présuppose une « analyse de concepts ». C'est à elle pourtant que songeait probablement Gödel, lui pour qui l'analyse conceptuelle est une pré-

1. On Abraham Robinson's work in mathematical logic, *The bulletin of the London mathematical society*, vol. 8, part 3, novembre 1976, 312-315.

2. Cf. en particulier, Hans Hermes, Ideen von Leibniz zur Grundlagenforschung : Die ars inveniendi und die ars judicandi, *Studia Leibnitiana, Supplementa*, III (1969), 92-102. Et plus récemment M. Sanchez-Mazas, La caractéristique numérique de Leibniz comme méthode de décision, *Studia Leibnitiana, Supplementa*, XXI (1980), 168-182. Nous avons nous-même relevé antérieurement la coïncidence de l'arithmétisation de la logique, au début de ce siècle, avec le projet leibnizien de « calcul universel » (La logique comme *ars inveniendi*, dans A. Robinet (éd.), *Doctrines et concepts. Cinquante ans de philosophie de langue française*. Paris, Vrin, 1988, 321).

cieuse composante de la recherche scientifique, et la logique une discipline utile aux mathématiciens[3].

Or, pour Leibniz, l'analyse est essentielle. Elle livre les éléments du calcul, représentés par des symboles primitifs et correspondant aux notions premières, ou au moins premières pour nous. Elle est indissociable de la généralisation de l'idée même de calcul, qui nous renvoie à une *operatio per Characteres*[4], dont le calcul numérique ou algébrique n'est qu'un échantillon particulier. Enfin elle se double souvent d'une analyse purement « caractéristique » dont le calcul lui-même, ou plutôt sa forme, est l'objet.

Par son premier aspect, déjà, mais par le deuxième et le troisième encore plus, l'analyse conceptuelle est une pièce maîtresse de l'*ars inveniendi.* C'est ce que nous nous proposons de montrer d'abord. Après quoi, nous ferons voir comment la théorie des modèles met aujourd'hui l'analyse logique au service de la découverte mathématique, s'offrant ainsi comme une *méthode* plutôt que comme un *fondement.*

I. — « Ars inveniendi », « ars combinatoria », « characteristica logica »

1. Il est généralement reconnu que la principale clef d'intelligibilité de l'*ars inveniendi* se trouve dans le *De Arte Combinatoria* dont le sous-titre : « Logica inventionis semina » laisse voir une grande proximité entre les deux notions de combinatoire et d'invention. Leibniz précise ailleurs que celle-ci est la principale application de celle-là[5], appelée aussi « synthèse », et parfois *ars formularia*[6].

La combinatoire est certes ancrée dans l'arithmétique *(sedes doctrinae istius Arithmetica)*, puisqu'elle consiste à trouver le *nombre* de toutes les combinaisons possibles pour des éléments dans des conditions données. Mais son applicabilité n'est pas bornée à cette discipline, puisque les éléments en question ne sont pas des nombres mais des *caractères* dont l'interprétation va de l'algèbre à la géométrie, en passant par la logique, la musique ou la cryptographie. D'où le rôle primordial de la caractéristique dans la combinatoire et le fait que bien des textes de Leibniz en donnent les vocables pour l'un à l'autre substituables. Par exemple, dans sa fameuse lettre à Tschirnhaus de mai 1678, Leibniz présente la combinatoire comme « une science des formes ou du semblable et dissemblable » *(scientia de formis seu de simili et dissimili)*, différant assez peu d'une « science caractéristique générale » dont les caractères peuvent

3. Cf. le témoignage de Hao Wang, *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge (Mass.), Londres, 1987, 167.
4. Lettre à Tschirnhaus, mai 1678, *GMS*, IV, 462 (pour les abréviations bibliographiques, voir la fin de l'article, p. 214).
5. *GMS*, V, 39.
6. *C*, 37.

« signifier » ou « représenter » des signes algébriques, des notes de musique, des concepts logiques[7]. La caractéristique, dite encore « symbolique »[8] ou spécieuse universelle[9], est absolument essentielle au progrès de l'*ars inveniendi*[10]. Elle lui est même consubstantielle[11]. Les caractères « font signe à l'esprit, l'aiguillonnent » et le poussent à « concevoir des notions universelles »[12]. Ils sont nos « instruments » pour inventer.

2. Cependant, l'*ars inveniendi* est présentée (suivant les polémiques célèbres au sujet des deux parties de la *dialectica*, invention et méthode), comme une partie, ou la partie essentielle[13] de l' « Art de penser » ou logique[14]. A la princesse Sophie, Leibniz écrit que l'*ars inveniendi* est la « vraye logique »[15]. Celle-ci apparaît, à son tour, dans son acception la plus large comme la « science générale », qui, à côté de la mémoire et de la maîtrise des passions[16], etc., comprend l'*ars judicandi* (amplement développée par la syllogistique d'Aristote) et l'*ars inveniendi* (encore dans sa jeunesse). Sans doute parce qu'elle est encore si loin de sa perfection, l'*ars inveniendi* a une grande importance aux yeux de Leibniz. Elle a beau ne pas différer totalement de l'*ars demonstrandi*[17], elle se situe tout de même plus haut dans l'échelle des valeurs de connaissance. Si les vérités « connues confusément et imparfaitement » se suffisent de la « méthode de la certitude », celles qui ne sont point connues du tout ont besoin de l'art d'inventer. Et « il est naturellement bien plus facile de démontrer les inventions que d'en dévoiler l'origine, et de faire ainsi progresser l'art d'inventer lui-même »[18]. Aussi Leibniz n'hésite-t-il pas à identifier

7. *GMS*, IV, 459-460; V, 241. Sur la caractéristique cf. *C*, 98-99, 326-327. Sur la combinatoire cf. *GPS*, V, 7; VII, 10, 297-298; *GMS*, VII, 159; *C*, 531-533.

8. *GMS*, IV, 465 et *C*, 511.

9. *GMS*, VII, 159; *GPS*, VII, 297-298; C, 336. Prises en toute généralité, spécieuse, caractéristique et combinatoire ne sont pas loin de se confondre.

10. « Progressus Artis inventoriae rationalis pro magna parte pendet a perfectione artis characteristicae » (*GPS*, VII, 198). De même *GMS*, V, 307 et *LH*, XXXV 1, 27, Bl. 3-10, dans la *Vorausedition*, zur Reihe VI, fasc. 6 (1987), 1369.

11. Cf. Historia et commendatio linguae charactericae universalis quae simul sit ars inveniendi et judicandi, *Œuvres philosophiques*, éd. R. Eric Raspe, Amsterdam et Leipzig, 1765, 533-540.

12. De linea ex lineis..., *GMS*, V, 269.

13. « ... illa logicae pars praestantissima... » (*GMS*, VI, 206).

14. « Unter der Logik oder Denkkunst verstehe ich die Kunst den Verstand zu gebrauchen, also nicht allein was fürgestellt zu beurtheilen, sondern auch was verborgen zu erfinden » (*GPS*, VII, 517).

15. *GPS*, IV, 292. De même *GPS*, VII, 172.

16. « (Scientia generalis) tractare ergo debet tum de modo bene cogitandi, hoc est inveniendi, judicandi, affectus regendi, retinendi ac reminiscendi, tum vero de totius Encyclopaediae Elementis, et summi Boni investigatione, cujus causa omnis meditatio suscipitur; est enim nihil aliud sapientia quam scientia felicitatis » (*GPS*, VII, 3). Cf. aussi *C*, 228-229, 511.

17. *GPS*, VII, 183. Mais Leibniz écrit aussi qu'entre démontrer et inventer « il y a bien de la différence... » (*GMS*, II, 223).

18. « Sane facilius multo est inventionum dare demonstrationem, quam originem, quae auget ipsam inveniendi artem » (lettre à Ch. Wolff, *GMS*, V, 384). Que l'art d'inventer ne se réduit pas à l'art de démontrer, de nombreux autres textes en témoignent, par exemple *GMS*, II, 276 : « Je ne suis pas fâché que M. de la Hire veut bien se donner la peine, que je ne

ce dernier avec la science générale[19], ou du moins à le compter parmi ses *initia*[20]. Distinct alors de la démonstration par calcul, il est ce « fil palpable qui dirige la recherche » par les voies de la combinatoire et de l'analyse et permet d'établir, exactement ou provisoirement, des sciences ou des portions de sciences, en sorte que tout un chacun puisse trouver *ex datis* et *non casu sed ratione*. L'art d'inventer c'est non seulement trouver le résultat cherché mais le prévoir[21]. Ou, comme dit Leibniz ailleurs[22], « l'invention des démonstrations [dépend] d'une *certaine Méthode* ». Le fil palpable consiste en une « règle de passage d'une pensée à une autre »[23].

3. Mais nous voilà en possession de trois termes : caractéristique, combinatoire, science générale pour en expliquer un seul : l'*ars inveniendi*. On ne peut, malgré des tentations alternatives, identifier strictement celui-ci à aucun des trois premiers. Et refuser cette identification, implique, en particulier, de ne pas réduire toute relation entre deux ou plusieurs termes à une relation d'inclusion. Par exemple, l'*ars inveniendi* est une application de l'*ars combinatoria* : celle-ci, de son côté, est un aspect, une *species*[24] ou une « méthode »[25] de celle-là. Les deux déterminations sont compossibles sans conduire nécessairement à l'identité des deux arts. Et même, à y bien regarder, ce sont là deux manières d'exprimer la même chose, à savoir que la combinatoire est une méthode générale de découverte mais non la seule.

Reste le problème du rapport de la combinatoire et de la caractéristique à la logique. Si celle-ci est l'art de penser universellement, alors elle englobe tout le pensable et en particulier l'art combinatoire[26], éventuellement par le biais de l'art d'inventer[27]. Mais si l'*art* de penser doit être une *science* générale, il faut bien, comme toute science rigoureuse et féconde, qu'il soit symbolique et fasse usage de la méthode synthétique.

voudrais point prendre, de réduire en démonstrations à la façon des anciens ce que nous découvrons aisément par nos Méthodes. Ce serait encore mieux, s'il se servait de nouveaux moyens capables d'avancer l'art d'inventer... »

19. *GPS*, VII, 168-169, 173, 180, 183; *C*, 219, 228-229.

20. Initia et specimina Scientia Generalis, *GPS*, VII, 57.

21. *C*, 161, ou *LH*, IV 7 A Bl. 4, *Vorausedition*, VI, fasc. 4 (1985), 706 : « Est autem inventio vel conjecturalis vel secum demonstrationem ferens. Et quae demonstrativa est, non tamen satis perfecta est, nisi ante aggressionem solutionis demonstrative praevideri possit, hac methodo necessario ad exitum ventum iri, alioqui inventio ex parte casui debetur. »

22. *C*, 153. Cf. aussi *GMS*, V, 258 : « ... ac methodos potius quam specialia... aestimavi. »

23. « Methodus inveniendi consistit in quodam *cogitandi filo* id est regula transeundi de cogitatione in cogitanionem » (*LH*, XXXV, 1, 27, Bl. 3-10, *Vorausedition*, VI, fasc. 6 (1987), 1364).

24. *GPS*, VII, 57.

25. *C*, 557.

26. *C*, 511. C'est un des aspects du « panlogisme » de Leibniz sur lequel Couturat a mis l'accent en soutenant que « la métaphysique de Leibniz repose uniquement sur les principes de sa logique, et en procède tout entière ». Une tendance symétrique, qui peut n'être pas exclusive de la précédente, consiste à situer la clef de voûte de tout le système dans la Monadologie. On va bien vite en besogne en identifiant ce « panlogisme » au logicisme strict, pour qui notions ou démonstrations mathématiques se réduisent en dernier ressort à des notions ou démonstrations logiques.

27. *GPS*, VII, 57.

Quel que soit donc leur type, les relations entre combinatoire et logique ont lieu dans les deux sens. Et elles sont d'autant plus complexes ou multiples que chacune des deux disciplines se présente tantôt sous l'aspect d'une science, tantôt sous celui d'un art. Pour la logique, cela est bien clair même d'après le peu que nous en avons dit. Pour la combinatoire, quoique le second aspect prévaille généralement dans les écrits de Leibniz, le premier n'est pas absent non plus[28]. Dans le *Plus ultra sive initia et specimina Scientiae Generalis...*, il apparaît que l'*art* combinatoire est identifié à la synthèse, tandis que la combinatoire « spéciale » est définie comme la « science des formes ou des *qualités* » en général, ou du semblable, par opposition à l'analyse « spéciale » ou « science des *quantités* en général » (la réunion de la combinatoire « spéciale » et de l'analyse « spéciale » constitue la *mathesis* générale). Quant à l'art d'inventer, il apparaît le plus souvent sous le jour d'une méthode, comme dans le *Plus ultra*, où il se trouve juste après le « calcul général », auquel il ne peut donc s'identifier, juste avant la Synthèse et l'Analyse. Mais de même que celles-ci donnent lieu à des sciences : la combinatoire et l'analyse mathématiques, de même il donne lieu à une « topique » dont relève en premier lieu l'Algèbre, mais aussi la dialectique, la rhétorique ou la science divinatoire[29].

On s'aperçoit alors de deux choses. La première : l'art d'inventer convoque l'analyse aussi souvent que la synthèse[30], si bien qu'à la subdivision de la logique en *ars judicandi* et *ars inveniendi* se superpose une subdivision en analyse et synthèse. Il faut donc considérer la contribution spécifique de l'analyse à l'art d'inventer. La seconde : de l'art d'inventer, de l'analyse et de la synthèse, les mathématiques nous offrent les meilleurs « échantillons ». C'est sur leur terrain en effet que la symbolique s'établit le plus aisément, et que nous raisonnons avec un si grand profit sur les caractères, les « notes », plutôt que sur les choses[31]. Aussi les mathématiques fonctionnent-elles comme une sorte de laboratoire pour la science générale. Celle-ci, en retour, peut prédisposer le mathématicien à généraliser les méthodes et à systématiser les résultats. Mais elle agit alors comme une composante intégrée et non comme un secours extérieur. La meilleure preuve en est que le nouveau calcul, inventé par généralisation aux infiniment petits des règles algébriques ordinaires, « porte en lui-même » ses justifications. Pas plus qu'il ne les doit à la métaphysique, il ne les cherche dans la logique. Comment parler alors du « logicisme » de Leibniz, si par ce terme on désigne la réduction des mathématiques à la logique comme à leur fondement ?

28. Cf. le « Plus ultra sive initia et specimina Scientiae Generalis... », *GMS*, VII, 49-50. Dans un fragment inédit Leibniz écrit : « Aliud est ars Combinatoria, aliud Scientia combinationum » *LH*, XXXV, 8, 30, Bl. 79, *Vorausedition*, VI, fasc. 6, 1372.

29. *C*, 37, 219.

30. *GPS*, VI, 292 et sq., 477; VII, 57; *GMS*, VII, 17; *C*, 162, 165, 167, 350-351, 557, 560, 563; *LH*, XXXV, 1, 27, Bl. 3-10, *Vorausedition*, VI, fasc. 6, 1356-1371.

31. *C*, 155, 176.

II. — Art d'inventer et analyse

1. La raison pour laquelle l'art d'inventer procède aussi bien par analyse que par synthèse est claire, et nous l'avons donnée en commençant : l'établissement des éléments d'une caractéristique, si nécessaire à l'exercice de l'art combinatoire et à l'art d'inventer est tributaire de l'analyse[32]. Celle-ci intervient encore, de façon essentielle, dans la recherche des solutions *générales* et *systématiques*, ou dans l'inspection de procédures *déjà* formelles, qui donne le branle à une formalisation plus poussée. Comme pour la synthèse, « une partie du secret de l'analyse consiste dans la caractéristique, c'est-à-dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert »[33]. Et ne croyons pas l'analyse moins certaine que la démonstration[34], elle a seulement un spectre plus large et « ouvre l'accès » à de nombreux résultats.

L'analyse est longue et difficile. Si elle est finie, elle constitue une démonstration ou « l'invention d'une commune mesure »[35]. Mais elle peut être infinie. Tandis que la synthèse consiste à combiner des données pour en inventer de plus complexes, l'analyse consiste à décomposer le complexe en plus simple, jusqu'à parvenir aux éléments primitifs, ou du moins primitifs pour nous[36]. Elle fait comme « l'anatomie » des choses[37], rend raison de tout ou du maximum[38], remonte du conditionné à ses conditions, des effets aux causes. Ainsi n'a-t-elle aucun besoin des suppositions étrangères[39], comme le sont les demandes des géomètres[40]. L'analyse est d'autant plus « pure » qu'elle se concentre sur le problème posé et le résout en ses requisits sans aucun recours extérieur[41]. Il faut donc « pousser l'analyse à bout », transformer les suppositions en théorèmes, dégager « l'origine », c'est-à-dire le principe, des inventions. Nous trouverons ainsi les méthodes les plus générales et la source d'une

32. *C*, 159.
33. *GMS*, V, 240.
34. Leibniz ironise sur ceux qui pensent l'analyse défaillante du point de vue de la certitude (*LH*, XXXV, 1, 27, Bl. 3-10, *Vorausedition*, VI, Fasc. 6, 1368).
35. *C*, 1.
36. *C*, 220-221, cf. les règles 2 et 5 énoncées dans De la Sagesse, *GPS*, VII, 83, ou *LH*, IV, 7 C, Bl. 160-161, *Vorausedition*, VI, fasc. 1 (1982), 193 : « ... catalogus *notionum primitivarum*, seu earum quas nullis definitionibus clariores reddere possumus. »
37. *C*, 167.
38. De la Sagesse, 5e règle.
39. Cf. la 3e règle dans De la Sagesse, *GPS*, VII, 83 ; *C*, 165.
40. *C*, 181. Leibniz observe que l'existence de suppositions ou axiomes est « la principale raison pourquoy la synthèse des Géomètres n'a pû estre changée encor en Analyse ».
41. *LH*, IV, 7 A, Bl. 4, *Vorausedition*, VI, fasc. 4 (1985), 706 ou *LH*, XXXV, 1, 27, Bl. 3-10, *ibid.*, fasc. 6 (1987), 1367-1368. L'analsye pure, Leibniz l'appelle « anagogique » par opposition à la « zététique » ou mise en équation d'un problème qui est déjà un mixte d'analyse et de synthèse.

multitude d'autres inventions[42]. On peut certes démontrer quelque chose sans en découvrir l'origine, et c'est alors par une méthode synthétique[43]. Mais « voir » l'origine donne sa pleine puissance à l'art des combinaisons[44].

2. L'analyse, en effet, est rarement employée seule; la plupart du temps, elle est mêlée à la synthèse[45], et sert, par exemple, à résoudre les questions que celle-ci permet de formuler[46]. Et résoudre c'est « trouver la clef d'une chose enveloppée »[47], expliciter l'implicite, dégager la forme, le « canon », la formule générale par laquelle on traitera systématiquement tous les cas particuliers, et sera ainsi soulagé des calculs[48]. Aussi l'algèbre, ou analyse des quantités finies, est-elle l'échantillon par excellence de la spécieuse universelle, de l'*ars inveniendi* et de la « méthode de l'universalité ». Elle nous habitue, par sa nature même de « spécieuse », à l'indétermination des signes et nous invite à concevoir par généralisation des signes ambigus représentant simultanément diverses opérations ou par analogie des signes représentant autre chose que des nombres : points, relations, quantités ou qualités de propositions logiques, etc. Elle nous enseigne donc l'art de la généralité et de l'analogie. Elle nous exerce à la pratique de cette « formalité constante » que nous devons observer dans tous nos raisonnements[49]. Bien qu'elle ne soit ni le tout des mathématiques[50], ni forcément la meilleure voie pour inventer[51], l'algèbre joue un rôle inducteur remarquable. Comme l'écrit Leibniz, ce n'est pas qu'il faille introduire l'algèbre partout, mais on doit établir, par analogie, des « formules universelles » propres à généraliser et à formaliser les raisonnements, et tâcher de « raisonner mathématiquement sur des matières... entièrement éloignées des mathé-

42. L'« origine » s'oppose à l'histoire, mais elle diffère aussi de la démonstration (*GMS*, II, 284; V, 384). Une chose est de montrer les vérités, une autre d'en dévoiler simultanément l'origine (*LH*, IV, 7, Bl. 4, *Vorausedition*, VI, fasc. 4 (1985), 707. Et pour Leibniz il faut toujours chercher l'origine des inventions (*LH*, XXXV, 1, 27, Bl. 3-10, *ibid.*, fasc. 6, 1367).

43. *LH*, XXXV, 1, 27, Bl. 3-10, *ibid.*, 1368.

44. *GMS*, V, 89.

45. *C*, 165; *GMS*, VII, 206-207.

46. *C*, 167.

47. *C*, 563; *LH*, XXXV, 1, 26, Bl. 3-4, *Vorausedition*, VI, fasc. 3 (1984), 624 : ... « et hoc proprie dicitur *analysis*, est enim velut inventio clavis in aliquo Cryptographemate. »

48. Lettre à Placcius, 8 septembre 1690 (Dutens, VI, I, 49), citée, avec d'autres textes analogues dans Couturat, *La logique de Leibniz*, Paris, PUF (1901), 479, n. 3, Cf. aussi *GMS*, VII, 189.

49. Lettre à la princesse Elisabeth (1678), œuvres de G. W. Leibniz éditées par L. Prenant, Aubier Montaigne (1972), 131.

50. Algebra cum Mathesi universali non videtur confundenda, *GMS*, VII, 205.

51. La géométrie n'inclut pas de façon intrinsèque les considérations de grandeur, d'égalité ou de proportion. D'où l'idée de l'*Analysis situs* pour étudier directement, et non par le détour des nombres, ou déterminés (arithmétique) ou indéterminés (algèbre), les relations de position et les configurations spatiales (*C*, 152, 563-568). Mais l'algèbre et l'analyse infinie sont à l'art d'inventer comme l'espèce au genre (*GMS*, VII, 206).

matiques »[52]. C'est donc l'analyse des méthodes algébriques qui induit l'idée d'une activité symbolique dont la fécondité déborde le calcul des quantités finies, et même la sphère du calculable. Si l'idée d'un calcul universel représente « la dernière perfection de l'art d'inventer », elle n'en épuise cependant pas toutes les possibilités[53]. On peut inventer autrement que par calcul, par une « simple vue de l'esprit »[54], par divination même ou par des « tentatives variées »[55].

3. Si le calcul représente seulement le but de l'*ars inveniendi* la caractéristique, elle, en est vraiment la source. C'est elle, d'ailleurs, qui constitue le trait commun à l'analyse et à la synthèse, à l'*ars demonstrandi* et à l'*ars inveniendi*, à la logique et aux mathématiques. D'où son rôle fondamental, qui dépasse de beaucoup celui d'auxiliaire de nos pensées. Elle n'accompagne pas seulement, de manière sensible, l'analyse des notions et l'établissement de « formules universelles ». Elle constitue par elle-même et indépendamment d'un calcul possible une démarche démonstrative ou inventive. Toutes les vérités démontrables dans un langage formel (une caractéristique) le sont par calcul ou, plus généralement, par « la seule manipulation des caractères selon une forme fixée »[56]. Le calcul mathématique n'est que l'exercice sur des caractères particuliers, nombres ou lettres, de cette formalité « caractéristique ». Mieux, le prendre lui-même pour objet d'analyse ménage des « ouvertures » parfois considérables. Intéressons-nous aux règles du calcul algébrique plutôt qu'à ses éléments, les quantités finies, et nous voilà au seuil de l'analyse infinie. On a assez souligné, en répétant Leibniz, que l'invention du calcul infinitésimal procédait de l'idée de caractéristique universelle. Il faut dire plus. L'esprit combinatoire, attentif aux formes, à l'ordre, aux similitudes « caractéristiques », suscite une analyse formelle de la formalité. L'analyse « caractéristique » aussi engendre du nouveau. On sait, par exemple, que d'avoir conçu des « nombres fictifs » ou symboliques pour représenter les coefficients des équations d'un système de plusieurs équations, Leibniz a été conduit à préfigurer notre écriture actuelle des déterminants[57]. Un autre exemple connu, mais pour nous très instructif, est celui que reprend Couturat dans l'Appendice III de son livre *La logique de Leibniz*. Il s'agit de l'analogie symbolique entre le développement d'une puissance d'un binôme et le développement de la

52. *GMS*, II, 229.
53. *GPS*, VII, 169.
54. *GMS*, II, 246.
55. *C*, 562.
56. *LH*, IV, 7 C, Bl. 160-161, *Vorausedition*, VI, fasc. 1 (1982), 195.
57. *GMS*, II, 229, 239-240, 269; *GMS*, V, 348-349 et les travaux de E. Knobloch dont on a une idée d'après l'article publié dans les *Studia Leibnitiana*, Supplementa XXII (1982), 96-118.

différentielle d'un produit de deux facteurs[58]. Si, dans la deuxième des équations suivantes :

$$(x+y)^1 = x^1 y^0 + x^0 y^1$$
$$d(xy) = d^1 x \; d^0 y + d^0 x \, d^1 y,$$

on considère x et y comme des indices de la lettre d et les différentielles d'ordre supérieur comme des puissances de la différentielle première, $d^1 \, x$ ou $d\,x$, alors on peut identifier les deux développements. Ainsi les opérations d'élévation à une puissance et de différentiation, en elles-mêmes distinctes, peuvent s'écrire de même façon. Calcul algébrique et calcul différentiel ont des langages, et donc des structures parallèles. Or, on a là le germe de la démarche de la théorie des modèles : constituer une métathéorie de théories mathématiques par l'analyse de leur caractéristique, c'est-à-dire de leur langage.

Rappelons, d'ailleurs, la bipolarité, essentielle à toute la pensée de Leibniz, entre la méthode et ses spécifications, le général et ses spécialisations, la forme et ses échantillons[59], le signe et ses interprétations. On y a reconnu récemment[60] comme un ancêtre du couple : système formel et interprétation (ou théorie abstraite et modèle concret). Et cela a donné lieu à une thèse brillante sur la complémentarité du système (métaphysique) de Leibniz et de ses modèles mathématiques[61]. Mais à nous de voir pourquoi Gödel a suggéré une si forte parenté des méthodes de la théorie des modèles à l'*ars inveniendi* de Leibniz.

III. — Caractéristique et théorie des modèles

1. Il y a sans doute un certain paradoxe à rapprocher la théorie des modèles de l'idée leibnizienne de caractéristique, de langue ou de science générale, dans la mesure où Leibniz avait pour but l'établissement d'une caractéristique ou d'une langue *universelles*. Car c'est en tournant résolument le dos à cette idée d'universalité que la théorie des modèles s'est développée à partir des années 1930. Elle n'a fait en cela que tirer la leçon du paradoxe de Richard (1905) et du théorème d'incomplétude de Gödel (1931). Ceux-ci montrent en effet que chaque langue exacte est passible d'un traitement arithmétique de ses moyens d'expression. Les symboles

58. Cette analogie sur laquelle Leibniz revient souvent, fait l'objet d'un mémoire particulier, Symbolismus memorabilis Calculi Algebraici et Infinitesimalis..., *GMS*, V, 377-381.

59. Ce terme revient sans cesse sous la plume de Leibniz, pour désigner non seulement un fragment d'une science, mais aussi une réalisation particulière, un modèle concret d'un schéma formel. Cf. la lettre à Nicaise (5 juin 1692), *GPS*, II, 535, et aussi *GMS*, IV, 465; V, 141-171; VII, 206.

60. Cf. par exemple, l'étude de N. Rescher, Leibniz's interpretation of his logical calculi, *The Journal of symbolic logic*, 19 1954, 1-13.

61. M. Serres, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Paris, PUF (1968).

primitifs et les expressions bien formées de la langue engendrent un formalisme dénombrable. Mais les mathématiques dépassent ce formalisme. D'où il suit que l'on ne peut concilier les exigences d'une langue exacte et celles d'une langue universelle comme le croyait Leibniz, et encore Frege ou Russell. La logique ne peut plus se proposer le projet d'établir des normes universelles pour toutes les sciences, et pas même pour toutes les mathématiques.

Cependant l'institution d'une caractéristique et d'un calcul universels représente pour Leibniz une « perfection » irréalisable d'un seul coup. L'essentiel reste, pour nous, de bâtir le plus possible sans attendre d'avoir les moyens de parachever l'analyse ou de garantir définitivement les fondements[62]. *En fait*, Leibniz ne cesse d'introduire des notations mathématiques, de mettre en évidence des analogies formelles, d'établir des connexions. L'impératif du progrès l'emporte sur l'intérêt pour les questions de statut. Ainsi, indépendamment de la question de savoir si les infiniment petits existent actuellement ou potentiellement, ils peuvent être considérés comme des « notions idéales » ou « fictions » propres à abréger le discours et faciliter la découverte[63]. L'idéal d'universalité, qui engendrerait un logicisme avant la lettre, est largement contrebalancé par le formalisme, tôt reconnu[64], de Leibniz. Ce formalisme mathématique, commandé par l'exigence « d'avancer nos connaissances », n'est pas une position de principe, mais l'attitude quasi naturelle du mathématicien en quête de découvertes. La formalité débusque l'erreur et augmente la certitude. Mais surtout elle ouvre des perspectives, rend visible ce qui était caché, nous aiguillonne à « concevoir des notions universelles ». Nous ne sommes pas loin de l'idée défendue dans l'école de Hilbert que l'axiomatique (abstraite) est un instrument de la recherche mathématique.

2. Il est remarquable de trouver, explicitement réfléchie, une attitude semblable chez Abraham Robinson. Pour lui, seul un point de vue formaliste permet d'accepter les entités symboliques ou les théories abstraites c'est-à-dire celles dont l'interprétation n'est pas directe, n'a pas de modèle fini mais extrapole du fini à l'infini. Or l'histoire des mathématiques prouve que les mathématiciens n'ont pratiquement jamais reculé devant les abstractions, les « fictions » au sens de Leibniz, les « éléments idéaux » au sens de Hilbert. Et la logique elle-même (théorie des modèles, théorie des démonstrations, récursivité généralisée) ne se prive ni de l'usage des procédures infinitaires ni de la référence aux totalités infinies. Il n'y a là qu'une « extension naturelle » et « féconde » du formalisme mathématique promu par la théorie des ensembles et par l'étude des

62. *GPS*, VII, 165.
63. *GMS*, IV, 92-93, 98, 110.
64. Husserl, *Logische Untersuchungen*, I, § 60 (1900); trad. franç., Paris, PUF, 1959, 238-241.

structures abstraites. Ainsi, la position formaliste rend compte d'un *fait*. Elle est commandée *a posteriori* par une pratique deux fois millénaire, et non *a priori* par l'idée d'enfermer toutes les vérités mathématiques dans le carcan préétabli du démontrable, qui fut, un temps, l'obsession de la *Beweistheorie*.

A strictement parler, d'ailleurs, il n'y a pas de différence ontologique entre les « éléments idéaux » et les autres. La production d'idéalités est un mode constant et essentiel à la prolifération mathématique. Aussi faut-il reconnaître à sa juste mesure la part d'une disposition formaliste dans l'invention. C'est la part du lion ! Mais toute arborescence formelle, si riche et si complexe soit-elle, est enracinée dans un noyau contrôlable, interprété ou dominé par des procédures finies. Les idéalités mathématiques croissent dans l'intervalle de ces balancements entre le fini et l'infini, et non dans un va-et-vient entre le « réel » et la « fiction ». Par exemple, un infiniment petit d'un modèle non standard « n'est ni plus ni moins réel », ou, ajouterons-nous, ni plus ni moins fictif, qu'un irrationnel standard[65]. Robinson se sépare de Leibniz et de tous ceux qui associent, de quelque façon que ce soit, formalisme mathématique et réalisme métaphysique[66]. Le formalisme se soutient de lui-même, par ses résultats. Il n'a besoin du réalisme ni comme repoussoir ni comme appui. Il n'y a à admettre les processus infinitaires ni *malgré* leur absence de « réalité » (Leibniz) ni *à cause* de leur « réalité » (adeptes de l'infini actuel en mathématiques). *De fait*, les mathématiciens les admettent parce qu'ils sont un prolongement fructueux de processus finis, et parce que les refuser c'est couper les ailes à l'invention. On peut garder l'idée leibnizienne de « fictions utiles » à condition de ne garder qu'elle, de la dissocier du préjugé dont Leibniz l'accompagnait en disant des infiniment petits qu'ils « *ne* sont *que* des fictions ».

3. Qu'un formaliste porte la plus grande attention au langage, au symbolisme, aux notations, aux modes d'expression, et cela pour faciliter la découverte autant et plus que par souci de rigueur, est chose attendue. Mais la théorie des modèles a fait de cette attention une *méthode*. C'est d'une façon systématique qu'elle voue l'analyse logique du langage mathématique à la découverte de procédures, logiques *ou mathématiques*, d'une généralité inaccessible par un autre moyen. En voulant faire de la logique « un instrument efficace de recherche mathématique », Robinson ne vise rien moins qu'à lui faire jouer pleinement le rôle d'*ars inveniendi*.

Les écrits d'A. Robinson ne laissent pas supposer une lecture de l'œuvre de Leibniz en dehors de quelques textes relatifs à la justification du calcul infinitésimal. Cependant, ils sont parcourus par une réflexion explicite sur l'art de l'analogie et de la généralité, ancrée, au départ,

65. *Non Standard Analysis*, Amsterdam, North-Holland (1966), 281-282.
66. From a formalist's point of view, *Dialectica*, 23, 1969, 45-49.

dans l'étude des structures algébriques. L'analyse logique de celles-ci doit conduire à en subordonner la multiplicité à des principes généraux qui transformeront les analogies mathématiques relevées entre certaines structures en identité logique formelle. Cela est possible parce qu'il est de l'essence de la théorie des modèles de s'occuper « d'ensembles de théorèmes ou d'ensembles différents de systèmes d'axiomes simultanément, alors que dans les mathématiques ordinaires on se contente de déduire des théorèmes particuliers pour des structures particulières, ou bien pour toutes les structures qui satisfont à un système d'axiomes particulier »[67]. Par exemple, on considère la théorie des corps algébriquement clos[68] et/ou la théorie des corps réels clos[69], c'est-à-dire simultanément l'ensemble des modèles de la première théorie et/ou l'ensemble des modèles de la seconde. L'inspection simultanée des multiplicités, leur comparaison comme aurait dit Leibniz[70], va découvrir des « théorèmes métamathématiques de l'algèbre »[71], c'est-à-dire des théorèmes algébriques découverts par des méthodes logiques.

Ainsi pour l'ensemble des corps réels clos, on trouve que tout énoncé élémentaire (formulé dans la logique du premier ordre), vrai dans le corps archimédien des nombres réels, est également vrai dans tout corps réel clos, archimédien ou non. Lorsqu'il est ainsi possible de passer d'un modèle particulier à n'importe quel modèle d'une certaine classe, on dit qu'on dispose d'un « principe de transfert ».

L'utilité mathématique des principes de transfert fut connue, même indépendamment des travaux de la théorie des modèles. Le principe de Lefschtez, formulé en 1953, énonce les conditions dans lesquelles on peut généraliser à un corps algébriquement clos quelconque un théorème vérifié dans le corps des nombres complexes. Mais à cette date, Tarski a déjà démontré la contrepartie logique d'un principe de transfert pour la classe des corps réels clos, à savoir la complétude de la théorie élémentaire des corps réels clos. Et Robinson a déjà tiré la conséquence du fait que toute théorie complète donne lieu à un principe de transfert[72]. La recherche systématique de tels principes est mise au programme de la théorie des modèles[73]. L'enjeu est clair : pouvoir généraliser un

67. L'application de la logique formelle aux mathématiques. *Actes du 2e Colloque international de logique mathématique*, Paris, Gauthier-Villars et Louvain, Nauwelaerts, 1952, 51-64.

68. Rappelons qu'un corps algébriquement clos est un corps tel que tout polynôme à coefficients dans ce corps a toutes ses racines dans ce corps. Prototype familier : le corps des nombres complexes.

69. Un corps est réel si on ne peut y écrire (— 1) comme somme de carrés. Un corps est réel clos si tous ses éléments positifs sont des carrés et si tout polynôme, de degré impair, à coefficients dans ce corps, a au moins une racine dans ce corps. Prototype familier : le corps ordonné des nombres réels.

70. Par exemple, *C*, 561-562.

71. *On the metamathematics of algebra*, Amsterdam, North-Holland, 1951, 9.

72. En effet, une théorie est complète si tous ses modèles vérifient les mêmes énoncés.

73. *On the application of symbolic logic to algebra*, Proc. intern. cong. math. Cambridge (Mass.), 1950, I, 686-694.

théorème élémentaire, même si la démonstration qui en est connue n'est pas élémentaire. Il y a, par exemple, des théorèmes démontrés, dans le corps des nombres réels, par des méthodes topologiques spécifiques à ce corps particulier. Il suffit pourtant de pouvoir les énoncer dans un langage élémentaire, ou de leur associer des énoncés élémentaires qui leur soient équivalents, pour conclure à leur validité dans un corps réel clos quelconque (par exemple, dans le corps des nombres réels algébriques). On voit comment l'analyse logique du langage se conjugue à l'étude de modèles mathématiques particuliers pour faire avancer les mathématiques elles-mêmes. La théorie des modèles n'est qu' « un développement naturel » des mathématiques modernes « par les moyens de la logique formelle »[74].

4. L'analogie entre le développement d'une puissance d'un binôme et celui de la différentielle d'un produit de deux facteurs avait conduit Leibniz à son théorème du calcul symbolique. L'analogie entre diverses structures algébriques conduit Robinson à des concepts méta-structuraux qui peuvent multiplier les analogies mathématiques dont ils tirent leur origine. Ainsi en est-il de la clôture algébrique et de la clôture réelle[75] d'un corps dont le schème commun est dégagé par Robinson sous le nom de la modèle-complétion d'une théorie[76]. On connaissait déjà la notion de « corps différentiel », ou corps dont certains couples d'éléments satisfont une relation binaire Rxy interprétée par « y est la dérivée de x » et obéissant à des règles qui sont les règles usuelles du calcul des dérivées. Robinson invente la notion de clôture différentielle, modèle-complétion de la théorie des corps différentiels et homologue des notions de clôture algébrique ou réelle. On a ainsi fabriqué par le secours de la logique une structure mathématique dont l'utilité est évidente pour un certain type de problèmes. Mais la notion de modèle-complétion permet aussi d'expliciter et d'augmenter les connexions entre les deux classes connues des corps algébriquement clos et des corps réels clos. Robinson parvient, en effet, à isoler la structure logique commune aux théorèmes divers qui, ici ou là, déterminent l'existence d'une solution commune à plusieurs équations algébriques. Ces théorèmes[77] donnent des procédures algorithmiques pour le calcul effectif de cette solution. Ces procédures peuvent être formalisées par des conjonctions d'énoncés logiquement

74. Cf. l'introduction de l'article cité *supra*, n. 67.

75. Il s'agit respectivement de la plus petite extension algébriquement close d'un corps et de la plus petite extension algébrique et réelle close d'un corps réel.

76. Some problems of definability in the lower predicate calculus, *Fundamenta mathematicae*, 44, 1957, 309-329.

77. Ce sont pour les corps algébriquement clos les théorèmes classiques de la théorie de l'élimination algébrique ou le thèorème des zéros de Hilbert (tout polynôme f nul pour toutes les valeurs des racines communes d'une suite de polynômes a une puissance f^k qui appartient à l'idéal engendré par les éléments de cette suite); et pour les corps réels clos le théorème de Sturm.

simples puisqu'ils ne comportent aucun quantificateur. En particulier, ces énoncés sont décidables, c'est-à-dire qu'on peut déterminer facilement (par l'usage des tables de vérités des connecteurs propositionnels) s'ils sont vrais ou faux. Où l'on aperçoit que la notion mathématique d'algorithme ou de méthode effective est, en fait, un « échantillon » de ce que le logicien appelle plus généralement une « procédure de décision ». Un calcul numérique simple est déjà « une procédure de décision ».

Ces quelques exemples, choisis en vertu de leur facilité à se présenter indépendamment des sophistications techniques qui les accompagnent nécessairement dans les divers articles de Robinson, montrent assez quel travail de conceptualisation logique accomplit la théorie des modèles par l'analyse des moyens d'expression utiles pour caractériser des concepts forgés par la mathématique classique ou structurale. Cette dernière nous a suffisamment persuadés de la puissance générative des concepts-structures. La théorie des modèles nous montre la puissance générative des concepts méta-structuraux. Et nous saisissons en quel sens l'analyse conceptuelle à la façon de la théorie des modèles perfectionne l'Art d'inventer en apportant une méthode plutôt que des solutions. Elle nous a découvert « l'origine » d'un ensemble de résultats dont la carrière est à peine commencée.

Abréviations bibliographiques

GMS *Leibnizens mathematische Schriften*, éd. par C. I. Gerhardt, Berlin et Halle, 1849-1863, 7 vol., réimpression à Hildesheim, Georg Olsm Verlagsbuchhandlung, 1962.

GPS *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, éd. par C. I. Gerhardt, Berlin, 1875-1890, 7 vol., réimpression à Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1960-1961.

C *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, éd. par L. Couturat, Paris, PUF, 1903, réimpression à Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1961.

H. B. SINACEUR.