**אקדמיית אלקאסמי - מכללה אקדמית לחינוך**

**למידת מושגים גיאומטריים במסגרת ניתוח אירועים מתמטיים בקרב סטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א'-ב' במכללה לדוברי ערבית**

**Learning geometrical concepts while analyzing mathematical cases among first**- **and second-grade prospective teachers studying at an Arabic speakers college**

מחברים: ג'והיינה עואודה-שחברי, הודא שאיב ואיחסאן חאג' יחיא

 **מחקר זה נערך בהתאם להמלצת הוועדה הבין- מכללתית במכון מופ"ת**

**ובתמיכת האגף להכשרת עובדי הוראה במשרד החינוך**

 **תקציר**

תחום הגיאומטריה נחשב לאתגר משמעותי בקרב מורי מתמטיקה בכלל, ובפרט בקרב מורים המלמדים בכיתות א'-ב'. מחקרים מצביעים על פערים בידע הגיאומטרי של מורים בשכבות גיל אלו לעומת מורים המלמדים בכיתות גבוהות יותר. למרות חשיבות הנושא, העיסוק המחקרי במורי מתמטיקה לכיתות א'-ב' מועט.

המחקר הנוכחי מציע תהליך הוראה–למידה המבוסס על רצף אירועים מתמטיים המדגישים הגדרות, דימוי-מושג, דוגמאות ואי-דוגמאות בגיאומטריה, הצדקות המצורפים למטלות שיפוט דוגמאות ואי דוגמאות ובוחן כיצד ניתוח אירועים אלה בשיח טיעוני מעצב את פיתוח הידע הגיאומטרי של סטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א' ו- ב' במכללה לדוברי ערבית ואת המעבר מהבנות אישיות להבנות קולקטיביות; במחקר א' נבדקת השפעת הניתוח על דיוק הגדרת מושג האלכסון, הרחבת דימוי-המושג וזיהוי דוגמאות לא-פרוטוטיפיות, לצד תיעוד שינוי ההצדקות מהסתמכות-וויזואלית להגדרה פורמלית, ואילו במחקר ב' נבחנת השפעת הדיון על דיוק זיהוי יחסי-ההכלה בין מרובעים שונים הנתונות באופן מילולי ובאופן וויזואלי והפחתת הצדקות המבוססות על תכונות לא-קריטיות המאפיינות את הדוגמאות הפרוטוטיפיות, או לשימוש בדוגמא הפרוטוטיפית כיחוס והגדלת השימוש בהצדקות המבוססות על יחסי-הכלה, הגדרות פורמאליות או תכונות קריטיות משותפות בין המרובעים השונים.כלי המחקר בשני המחקרים שילבו שני מקורות נתונים משלימים: שאלוני קדם-פוסט ותצפיות וידאו על דיוני הכיתה. בכל מחקר הועברו למשתתפים שאלונים זהים במבנה בתחילת ההתערבות ובסיומה. במחקר א' במבחנים חלק אחד דרש ניסוח הגדרה מדויקת (אלכסון), וחלק אחר הציג משימות זיהוי ונימוק של דוגמאות ואי-דוגמאות. במחקר ב' ניתנו משימות של זיהוי יחסי-הכלה בין מרובעים שונים הנותנים באופן וויזואלי ובאופן מילולי, המשתתפים התבקשו להצדיק את בחירתם. תגובות הסטודנטים נותחו בניתוח תוכן: במחקר א׳ סווגו ההגדרות בקטגוריות שהציעו צמיר ועמיתיה (Tsamir et al, 2015) להגדרות מושגים גיאומטריים, ואילו במחקר ב׳ נותחו ההצדקות לפי מערכת הקטגוריות של חאג' יחיא והירשקוביץ (Haj-Yahya & Hershkowitz, 2013) ליחסי-הכלה. במקביל צולמו דיוני הכיתה במלואם; ונותחו האינטראקציות במודל טולמין (1969, Toulmin, 2003), שאִפשר להתחקות אחר מבנה הטיעון והתקדמות ההבנה.

ממצאי המחקר א' מצביעים על כך שלפני ההתערבות כל המשתתפים סיפקו הגדרות שגויות והתקשו לזהות דוגמאות לא פרוטוטיפיות של אלכסונים בשאלון הקדם. ואילו, תהליך ניתוח האירועים המתמטיים סייע למשתתפים לבנות מחדש את ההגדרות שלהם לאלכסונים ולזהות את התכונות הקריטיות של מושג זה, מה ששיפר את יכולתם להרחיב את דמוי המושג שלהם כך שיכללו דוגמאות לא פרוטוטיפיות. ההבנה המשופרת של המשתתפים התבטאה בשיפורים משמעותיים בשאלון פוסט שנערך בתום תהליך ההתערבות.

ממצאי מחקר ב' הנגזרים מניתוח שאלוני קדם-פוסט ותצפיות וידאו מעידים על שיפור משמעותי בזיהוי יחסי-ההכלה במטלות המילויות ובמטלות הוויזואליות וגם על שיפור משמעותי בהצדקות שמשתמשים בהם המשתתפים בעת שיפוט יחסי-ההכלה כאשר במבחן המקדים יותר משתתפים התבססו על הדוגמאות הפרוטוטיפיות כנקודות יחוס וגם על התכונות הלא קריטיות המאפיינות את הדוגמאות הפרוטוטיפיות כאשר במבחן פוסט יותר משתתפים התבססו על הגדרות פורמאליות, תכונות קריטיות ויחסי-הכלה בין התכונות הקריטיות של המרובעים השונים (תכונות קריטיות משותפות). חשוב לציין כי השינוי בזיהוי יחסי-ההכלה והצדקותיהם היה גם ליחסי-הכלה אשר לא נדונו במאורעות המתמטיים.

**ממצאי המחקרים שנערכו מפורסמים:**

Shayeb, H., Shahbari. J. A., & Haj-Yahya, E. (2024). First- and second-grade prospective teachers reconstructing definitions of polygon diagonals. *Mathematics Education Research Journal.* 10.1007/s13394-024-00495-z

Haj-Yahya, E. Shayeb. H. & Shahbari, J. A. (2025). Developing recognition and justification of quadrilateral inclusion relations following a discussion of mathematical events. In N. Ehrenfeld, R. Barkai, M.  Weingarden, Z. Cohen , A. Platni & G. Schwartz(Eds.). *Proceedings of the 13th Jerusalem conference for research on mathematical education* (pp. 134-135). Jerusalem, Israel.

 הממצאים הוגשו לשיפוט כמאמר בכתב העת Mathematical Thinking and Learning וכעת המאמר נמצא בתהליך שיפוט.

 חלק מהממצאים הוצג בכנס הקונגרס הארבע עשר של האגודה האירופית למחקר בחינוך מתמטי (CERME14),14th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education באירוח האוניברסיטה החופשית של בוזן-בולצאנו באיטליה.

מבוא

מורים למתמטיקה בכיתות א'-ב' נחשבים לאחראים להקניית יסודות המתמטיקה בכלל והגיאומטריה בפרט לתלמידיהם. חשיבות תפקידו של המורה והשפעתו על הישגי התלמידים במתמטיקה הודגשו יותר מאשר בתחומים אחרים (Boonen et al., 2014) והקשר בין רמת הידע של המורים במתמטיקה לבין הישגי תלמידיהם נמצא ואומת במחקרים שונים לאורך השנים (Sherstha, 2022; Campbell et al., 2014; Hill et al., 2005; Peterson et al., 1989). באופן מיוחד, ידע בגאומטריה ורמת החשיבה הגאומטרית של המורים משפיעים על רמת החשיבה הגאומטרית של תלמידיהם (Pavlovičová et al., 2022). מורים למתמטיקה בכיתות א'-ב' מוכשרים בארץ בשני מסלולים במכללות לחינוך - החוג להוראת מתמטיקה בבית ספר יסודי, והחוג לגיל הרך שמאפשר הרחבת ההסמכה לכיתות א'-ב'. ממצאי מחקרים מעידים על רמת ידע לוקה בחסר בקרב מורים וסטודנטים בתחום הגאומטריה בעולם (Jones למשל et al., 2002) בארץ (Tsamir et al., 2014 למשל) ובחברה הערבית בישראל בפרט (Shahbari, 2022).

לנוכח הדברים לעיל, יש חשיבות רבה לטפח את הידע בגאומטריה של המורים העתידיים (Sharyn & Colleen, 2011; Tutak, 2009). הבנת הגדרות מתמטיות של מושגים נחשבת להכרחית, ומורים לגיל הרך נדרשים להיות בקיאים בהגדרות מתמטיות, בזיהוי תכונות קריטיות של הצורות הגאומטריות השונות ובעלי דימוי מושג מורחב ומדוייק ככל האפשר לגבי צורות אלו (Hill et al., 2005). אי-לכך, עלה צורך במחקרים (Mammarella et al., 2017; Taylor et al., 2017) בפיתוח ידע בקרב מורים אלה.

אחד הכלים החשובים שנעשה בהם שימוש בפיתוח ידע במהלך הכשרת מורים הוא דיון באירועים מתמטיים (Shulman, 1992; Tirosh et al., 2019; Herbst et al., 2017), במיוחד אירועים מבוססי שיח טיעוני שיאפשרו יצירת קהילת לומדים שדנים באירועים (Flynn & Klein, 2001). ניתוח אירועים מתמטיים מחייב את הסטודנטים לבחון קונפליקטים מושגיים, למקד את תשומת הלב בתכונות קריטיות ולגבש הצדקות פורמליות; תהליך זה מקדם מעבר מהסתמכות על אינטואיציות חזותיות להבנות מושגיות מעמיקות ומנומקות (Tirosh et al., 2019). התבוננות רגעית ומחקרית ב“נקודות מפנה” כיתתיות אינה מעשירה רק את ההבנה המתמטית של המורים לעתיד, אלא גם מציעה אסטרטגיות מורכבות לבניית אינטראקציות כיתתיות פוריות וליצירת ידע משותף (Lin, 2002). בחינה ביקורתית של רגעים אותנטיים אלה משמשת מנוף מרכזי להתפתחות מקצועית ולעיצוב הוראה מיטבית. לנוכח מיעוט התכניות הפורמליות והמחקר האמפירי בגאומטריה במכללות דוברות ערבית (Shahbari, 2022), המחקר הנוכחי מאמץ את גישת האירועים המתמטיים ובוחן את השפעתה על הבניית הידע הגאומטרי—בהגדרת מושג האלכסון ובזיהוי יחסי־הכלה—ועל המעבר מהבנות אישיות להבנות קולקטיביות בקרב מורי העתיד.

סקירה ספרותית

**החשיבה הגאומטרית והתפתחותה**

חשיבה גיאומטרית כפי שהוגדרה על ידי פאבלובקובה (Pavlovičová et al., 2022) היא היכולת של הלומדים להשתמש במושגים גיאומטריים בשיעורי מתמטיקה ותחומים שונים בחיים האמיתיים .

תיאוריית החשיבה הגיאומטרית של ואן הילה מתארת את התפתחות רמות ההבנה הגיאומטרית השונות (Van Hiele 1984). הבסיס של התיאוריה הוא הרעיון כי צמיחת ידע הלומד בגיאומטריה מתרחשת במונחים של התקדמות היררכית ברמות החשיבה, כאשר אי אפשר לדלג על ולעקוף אף רמה ברמות אלו בעת ההתקדמות (Burger and Shaughnessy 1986; Clements 2003). חמש רמות החשיבה מוצגות בטבלה 1.

**טבלה 1.**

 תיאור רמות תיאוריית החשיבה הגיאומטרית של ואן הילה

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| #רמה | תיאור | יכולת הלומד ברמה זו |
| 1 | וויזואליזציה | תפיסת צורות גיאומטריות כשלמויות ובאופן הוליסטי, עדיין ללא הבנת תכונות הצורה אלא זיהוי ושיום שלה. הצורות נשפטות לפי הופעתן והמראה שלהן. |
| 2 | אנליזה | הלומד חוקר את הצורות מבחינת תכונותיהן באופן אמפירי, מפרק אותן לחלקיהן ומזהה תכונות שונות של כל אחת מהן. לכן, כל צורה מתקשרת עם מכלול תכונותיה. |
| 3 | סידור | הלומד מודע לקשרים בין צורות, מודע לקשרים בין התכונות השונות של אותו מושג כאשר הוא מסוגל להבין שישנו קשר בין תכונות המושגו, ואף להבין את תפקיד ההגדרה הפורמלית. אך, הנימוקים שלו עדיין אינם נימוקים פורמאליים |
| 4 | דדוקציה | הלומד תופס את משמעות הדדוקציה (הסקת מסקנות מן הכלל אל הפרט) כאמצעי לבניה ולפיתוח תיאוריה גיאומטרית |
| 5 | דיוק | הלומד מבין את האספקט הפורמאלי של הגיאומטריה, ויש לו יכולת לחקור את התוצאות הנובעות מהחלפת מערכת אקסיומות אחת בשנייה. |

 הזוג וואן הילי ( Van Hiele, 1999) הצביעו על כך כי ההתקדמות מרמה אחת לשנייה לא קשורה בגיל או בהתבגרות אלא קשורה בסגנון ההוראה אשר משתמשים בו, כאשר סוגי הוראה מסויימים מעקבים את ההתפתחות וסוגים אחרים מקדמים את ההתפתחות. באמצעות תיאוריה זו, הזוג ואן-הילה (Van Hiele 1984) ניסו לתת הסבר לעובדה שלומדים רבים נתקלים בקשיים בכל הקשור לתהליכים המעורבים בחשיבה גיאומטרית. קשיים אלה, נובעים מתוך אי התאמה בין רמת ההוראה לבין רמת ההבנה הגיאומטרית של הלומדים. כעדות לכך קלימנטס וסאראמה( 2011, Clements & Sarama) ציינו במחקרם כי מורים רבים מתבססים על המראה החיצוני של הצורה והדמיון לצורות האב-טיפוסיות אשר זה מתבטא ברמה ראשונה של החשיבה הגיאומטרית, כלומר מתבססים על הדוגמה הפרוטוטיפית (אב-טיפוסית) כנקודת ייחוס. ובמקרה הטוב מזהים ומאפיינים צורות לפי תכונותיהן אשר מסווגים לפי רמה שניה. אך, מעט מהם מגיעים לרמה חשיבה שלישית, בה יחסי-ההכלה בין הצורות השונות ותכונותיהן והבנת תפקיד ההגדרה מהוות נדבך מרכזי (van Hiele and van Hiele, 1958). לאור האמור לעיל, הוראת תחום הגיאומטריה צריכה להיות מתוכננת בהתבסס על רמות אלו (Choi-koh 1999).

הגדרות בגאומטריה

אחד המודלים המרכזיים של רכישת מושגים מתמטיים הוא המודל שפיתחו ווינר והרשקוביץ (Vinner & Hershkowitz, 1980), וטול ווינר (Tall & Vinner, 1981). המודל כולל שני מרכיבים: 1) הגדרת המושג: התיאור המילולי-מתמטי של המושג, שהוא אוסף מילים שמטרתו לאפיין את המושג. 2) דימוי המושג: מבנה הקוגניטיבי שכולל את כל הדוגמאות והתהליכים הנמצאים בקוגניציה של תלמיד מסוים והקשורים במושג נתון. מבנה זה נבנה ומשתנה במהלך תקופת הלימוד, או דרך חוויותיו האישיות של הלומד. דימוי המושג יכול להיות שלם, חלקי או שגוי; למעשה, המושג נלמד כאשר דימוי המושג שנבנה מתאים להגדרת המושג (Vinner, 1991).

להגדרות מתמטיות יש תפקיד מרכזי בהבנת המשמעות של מושגים מתמטיים (Okazaki, 2013) וגם בפתרון בעיות מתמטיות, כגון בבניית משפטים והוכחות (Haj-Yahya et al.,2019; Haj-Yahya, 2021), וגם ההגדרות והדרך בה הן מוצגות לתלמידים מעצבות את הקשרים בין דימוי המושג והגדרת המושג ומהוות לכן חלק בסיסי במבנה הידע של הפרט אשר משפיע על תהליך החשיבה שלו (Tall & Vinner, 1981; Vinner & Hershkowitz, 1980).

מחקרים רבים הראו כי תלמידים רבים נתקלים בקשיים רבים במטלות בהן הם מתבקשים להגדיר מושגים מתמטיים בכלל או גאומטריים בפרט. כמו-כן, יש להם קשיים בהבנת המבנה של ההגדרה ומשמעותו (Marchis, 2012;Haj-Yahya et al.,2019; Haj-Yahya, 2021). פעילויות מתמטיות המעמידות את התלמידים בפני קונפליקט שיכול להיפתר על ידי הגדרה מתמטית מדויקת נחשבות לפעילות מומלצת (Vinner, 1991). סוגי הכשלים הקיימים בהגדרות, הכשל הראשון הוא **הגדרה כוללת תכונות לא קריטיות**, כלומר הנחקרים כללו תכונות לא קריטיות, המופיעות רק בחלק מהדוגמאות של הצורה – הדוגמאות הפרוטוטיפיות, לדוגמה כאשר מוסיפים להגדרת המלבן את התכונה כי זוג אחד של צלעות יותר ארוך מהזוג השני (Hershkowitz, 1990; Fujita & Jones, 2007; Türnüklü et al., 2013). אספקט אחר לגבי קשיים וכשלים בהגדרות קשור במבנה הלוגי של ההגדרה, דה-ווילייה (de Villiers, 1998) דיווח על בעיית ההגדרה "הלא חסכונית" (עודפת) או "הגדרה חסרה". לגבי הגדרה לא חיסכונית דה-ווילייה דיווח על כך שכאשר התלמידים התבקשו להגדיר מעוין, הנטייה של רוב התלמידים הייתה לכלול בהגדרה רשימה ארוכה של כל התכונות של המעוין. ההגדרה "הלא חסכונית" היא נכונה אבל חלק מאנשי החינוך המתמטי דוגלים בה וחלק אחר לא מקבלים אותה. נקודה אחרת לגבי המבנה הלוגי של ההגדרה קשור בהגדרה החסרה, תלמידים נתנו הגדרות תכונות קריטיות נכונות אך לא שלמות ("חסרות"). לדוגמה כאשר מגדירים מעוין כמרובע שבו האלכסונים ניצבים זה לזה, ההגדרה מכילה תכונה קריטית של המושג, אבל תחת הגדרה זו יכול להיכלל אי דוגמאות כמו דלתון לדוגמה (למרות שגם אלכסונים ניצבים היא הגדרה חסרה גם עבור דלתון).

יחסי-ההכלה

אחת היכולות החשובות ברמה השלישית-רמת הסדר (Ordering) ברמות הזוג וואן הילי היא הבנת יחסי-הכלה בין המושגים השונים מצד אחד ובין התכונות של אותם מושגים מצד שני,מחקרים רבים הראו כי לילדים קשה לקבל כי ריבוע הוא מלבן, מעוין או מקבילית, גם אם הם יודעים את התכונות של כל הצורות הגיאומטריות הללו (Fujita & Jones, 2007; Hershkowitz, 1990; Okazaki & Fujita, 2007; Pickreign 2007). אוקאזאקי ופוג'יטה (Okazaki & Fujita, 2007) ערכו מחקר שבדק 234 תלמידי כיתות ט' ביפן בשנת 1996 ו-111 פרחי הוראה בסקוטלנד בשנת 2006. שתי קבוצות המחקר מילאו אותו שאלון, והממצאים היו מעניינים: הן היפנים והן הסקוטים אך רבים מהם לא ראו את המלבן כסוג של מקבילית. כמו כן הן תלמידי יפן והן פרחי הוראה סקוטים התקשו לראות את הריבוע כסוג של מלבן או מעוין. עם זאת, ליפנים היה קשה יותר לראות את הריבוע כמלבן, בעוד שפרחי ההוראה הסקוטים התקשו יותר לראותו כמעוין.

במחקרם, חאג'-יחיא והרשקוביץ (Haj-Yahya & Hershkowitz, 2013) אישרו את תוצאות מחקרים קודמים בנוגע להשפעתם של תכונות לא קריטיות הקשורות בדוגמאות פרוטוטיפיות המאופיינות באלמנטים חזותיים מאוד חזקים על הבנת יחסי-ההכלה בין מרובעים. בנוסף, הם גילו כי תלמידי כיתה י' הצליחו יותר בזיהוי יחסי-הכלה בין מרובעים כאשר הציגו להם משימות מילוליות ולא משימות וויזואליות, וזה היה ממצא בלתי צפוי. עוד מצאו חאג'-יחיא והרשקוביץ באמצעות ראיונות עם תלמידים, הם גם גילו של פוזיציה של הצורה יש תפקיד בזיהוי יחסי-ההכלה שלהם. כאשר ניתנו שני ריבועים אחד עומד על הקודקוד והשני עומד על הצלע שלו, כאשר התבקשו התלמידים לזהות את כל המעויינים, יותר תלמידים זיהו את הריבוע כמעויין כאשר הוא עומד על אחד הקודקודים מאשר כאשר הוא עומד על אחת הצלעות.ככלל, המחקר שופך אור על הגורמים המורכבים המשפיעים על הבנת התלמידים במושגים מתמטיים. במחקר שהתפרסם לאחרונה גילה כי גורמים שפתיים סימנטיים השפיעו על זיהוי ונימוק יחסי-הכלה בין מרובעים שונים ובפרט בין ריבוע ומלבן (Haj-Yahya & Haj-Yahya, 2024).

במחקר אשר בוצע על ידי זייביק (Zeybek, 2018) אשר בדק את ההבנה של פרחי הוראה למתמטיקה לגבי יחסי-ההכללה בין מרובעים. המשתתפים התכוננו ללמד מתמטיקה לכיתות התיכון (כיתות ה'-ח'). במחקר השתתפו 48 פרחי הוראה אשר מילאו שאלון מעוצב בתחילת וסוף סמסטר. בין הערכות אלה, פרחי ההוראה השתתפו ביחידה של חמישה שבועות לגיאומטריה. בתחילה, רוב פרחי ההוראה גילו קושי בזיהוי מרובעים ויחסי-ההכלה שלהם. עם זאת, עד סוף הסמסטר, יותר פרחי הוראה הפגינו הבנה משופרת של היחסים ההיררכיים בין המרובעים.

רמת הידע בגאומטריה של מורים וסטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה

ממצאי מחקרים שנערכו בעולם בקרב מורים בפועל ומורים המתכשרים להוראת מתמטיקה ובדקו ידע בגאומטריה מצביעים על רמות חשיבה גיאומטרית נמוכות (Pavlovičová et al., 2022) וידע לקוי על למושגים שונים בגאומטריה. מחקרים שנערכו בארץ, כגון מחקר של צמיר ועמיתיה (Tsamir et al., 2014), ומחקרה של שחברי (Shahbari, 2022) אשר נערך בחברה הערבית, מצביעים על רמה נמוכה של ידע בגאומטריה בהשוואה לשאר התחומים בקרב מורים לכיתות א'-ב'. באופן מיוחד, מורים מתקשים בנושא צורות דו-ממדיות (למשל, Fujita & Jones, 2006) וגופים (למשל, Koçak et al.,2017). מחקרים רבים הראו כי למורים יש קשיים לגבי הגדרות בגאומטריה ותפקידן. הם מתקשים להגדיר ולהשתמש בהגדרות לזיהוי, מיון ובנייה של דוגמאות ואי-דוגמאות של המושג. למשל, תוצאות המחקר של צמיר ועמיתיה (Tsamir et al., 2014) מראות שהמורות שהשתתפו במחקר הצליחו בהגדרת משולשים, אך התקשו בהגדרת מעגלים וגלילים. במחקר של פיקריין (Pickreign, 2007) דווח שיותר ממחצית הנחקרים חשבו שבמלבן חייבות להיות שתי צלעות ארוכות יותר מהצלעות האחרות. אספקט אחר לגבי קשיים בהגדרות קשור במבנה הלוגי של ההגדרה. חאג' יחיא ועמיתיו (Haj-Yahya et al., 2019) דיווחו על בעיות של הגדרה "לא חסכונית", "הגדרה חסרה", או פסילת הגדרות שקולות בהגדרת המקבילית בקרב מורים.

 אירועים מתמטיים

אירועים מתמטיים הם מקרים שמתרחשים בכיתת המתמטיקה ומתארים בעיות במתמטיקה, ועליהם המורה מגיב (מרקוביץ, 2003). סוג אחד של אירוע מתמטי הוא "מצב בעייתי" (Markovits & Smith, 2008). תרחישים אלה, המבוססים לעתים קרובות על מצבי כיתה היפותטיים אמיתיים או מבוססי מחקר המשקפים את חשיבתם של התלמידים, מציגים בעיה או דילמה, ומעוררים ניתוח ותגובות אפשריות (Markovits & Even, 1999).

אירועים נחשבים לכלי חשוב בהכשרת מורים ושימשו חוקרים שונים לאורך השנים (Tirosh et al., 2019; Herbst et al., 2017; Shulman, 1992). העיסוק באירועים מתמטיים נמצא מועיל למורה מכיוון שהוא חושף ומגביר את המודעות שלו לצורות החשיבה השונות אצל תלמידים ולדרכי התגובה להן (מרקוביץ, 2003). כמו כן, מאגר האירועים יהווה מאגר תקדימים שיתרמו לעבודת המורה בכיתתו (Shulman, 1992). בנוסף, הוא מספק הזדמנות להיבנות על החשיבה המתמטית של הלומדים, כך שהוא יעזור להם להבין טוב יותר רעיונות מתמטיים חשובים (Stockero et al., 2019). החשיבות של האירוע היא בעצם הדיון המתרחש סביבו שמאפשר יצירת קהילת לומדים, דיון המתבסס על שיח טיעוני, שבו הלומדים מסבירים את הטיעון שלהם, מקשיבים, מסכימים או מתנגדים להנמקה של האחר (Toulmin, 1969, 2003). לכן, המקרים צריכים להיות עשירים ומהותיים כדי לאפשר רמות מרובות של ניתוח ופרשנות, לייצג את הבעייתיות והמורכבות, וללמד את הלומדים בהקשר כלשהו.

לנוכח הממצאים לעיל, המחקר הנוכחי יציע איך ניתן לטפח ידע בסיסי בגאומטריה בקרב סטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א'-ב' על-ידי שימוש באירועים מתמטיים.

 מטרת המחקר ושאלותיו

מטרת המחקר: לבדוק את ההשפעה של ניתוח אירועים מתמטיים מבוססי שיח טיעוני על הבניית ידע בגאומטריה (הגדרת מושג האלכסון וזיהוי יחסי-הכלה בין המרובעים השונים) בקרב סטודנטים מתכשרים להוראה בכיתות א'-ב' במכללה לדוברי ערבית. בהתאם למטרת המחקר, ולפי הרקע התיאורטי, נוסחו השאלות הבאות:

**שאלות מחקר א – מושג האלכסון**

1. כיצד מגדירים סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה לכיתות א׳–ב׳ את מושג האלכסון במצולע, באיזו מידה תואמת דמוי-המושג שלהם את ההגדרה הפורמלית?
2. כיצד משתנים הן הגדרת האלכסון והן דמוי-המושג של הסטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א' ו- ב' בעקבות ניתוח אירועים מתמטיים העוסקים בהגדרה זו, וכיצד מתפתחת ההתאמה בין השתיים לאורך הזמן?

**שאלות מחקר ב – יחסי-הכלה בין מרובעים**

1. כיצד משפיע הדיון באירועים מתמטיים על דיוקם של סטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א' ו- ב' בזיהוי יחסי-הכלה בין מרובעים?
2. באילו דרכים משנה הדיון באירועים מתמטיים את אופי ההצדקות שמציגים הסטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א' ו- ב' בעת זיהוי יחסי-הכלה בין מרובעים?

 **שיטות המחקר**

המחקר בחלקיו א' ו-ב' הוא מחקר פעולה (לוי, 2006) המשלב שיטות איכותניות וכמותיות. המחקר מתבסס על מחקר חלוץ שנערך בשנת תשפ"ב וממצאיו הראו שלסטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א' ו- ב' יש ידע לקוי בהגדרת מושגים גיאומטריים בסיסיים למידה מבוססת ניתוח אירועים תורמת לבניית ידע.

משתתפים

ב*מחקר א'* השתתפו 23 סטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א' ו- ב'. ב*מחקר ב'* השתתפו 20 סטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א' ו- ב'. כל המשתתפים בשני המחקרים למדו בשנתם הרביעית במסלול לתעודת הוראה לכיתות א’-ב’ במכללה להכשרת מורים דוברי ערבית בישראל, לאחר שסיימו שלוש שנות לימוד קודמות בהכשרה להוראה בגיל הרך. שני המחקרים התקיימו במסגרת הקורס "הוראת גיאומטריה", שהוא הקורס השני במסלול, לצד הקורס "הוראת חשבון לכיתות א’-ב’". בשני המקרים בוצעה דגימת נוחות, שכללה את כלל הסטודנטים שנרשמו לקורס והסכימו להשתתף במחקר.

כלי המחקר

הנתונים נאספו באמצעות שלושה כלים: תצפית, שאלונים מקדימים ומסכמים, זאת בנוסף לתצפית.:

### **כילי המחקר א': מושג האלכסון**

**תצפיות וידאו.** במהלך שלושת מפגשי ההוראה–למידה שעסקו באלכסונים הוצבה מצלמת-וידאו בפינת הכיתה ותיעדה את מליאת הדיון לכל אורכו. ההקלטות תומללו מילה במילה מיד בתום כל מפגש. התמלולים שימשו לבחינת דפוסי השתתפות, מבנה טיעונים ולכידת “נקודות מפנה” שבהן הסטודנטים שינו או עדכנו את הגדרתם לאלכסון.

**שאלון מקדים/מסכם.** בתחילת המחקר ובסיומו קיבל כל משתתף שאלון אישי לפי הפירוט הבא:.

1. *משימת הגדרה*: הסטודנטים התבקשו בשני השאלונים לנסח הגדרה פורמלית לאלכסון במצולע.
2. *משימת זיהוי*:
	* במבחן מקדים: הוצגו 5 מצולעים ובהם קטעים מסוגים שונים (פנימיים, חיצוניים, חוצים צלע). המשתתפים סימנו אילו קטעים הם אלכסונים ונימקו. (נספח מס.1)
	* במבחן מסכם: המשתתפים התבקשו לצייר כל האלכסונים היוצאים מאחד הקודקודים במצולע נתון (מספח מס.2)
3. **משימת ניתוח**: במבחן מסכם, נוספה משימת ניתוח לפתרונות שני תלמידים למשימת שרטוט אלכסונים מקודקוד נתון . המשתתפים נדרשו (א) להסיק את ההגדרה המשתמעת שאימץ כל תלמיד, ו-(ב) ליישם כל אחת מן ההגדרות על מצולעים נוספים.

חלק מן הפריטים נבנו על-פי ספרות מחקרית מקבילה (למשל Tsamir et al., 2014; Cohen, 2020) וחלק פותחו בידי צוות החוקרים. נוסחי השאלות תורגמו לערבית בסיוע שני מומחים להוראת מתמטיקה ודובר ערבית שפת-אם, ועברו הליך “תרגום לאחור” לאנגלית כדי לוודא שקילות. טיוטת השאלון נוסתה בפיילוט קצר (n = 6) מחוץ למדגם המחקר.

### כילי המחקר – חלק ב: יחסי־הכלה בין מרובעים

**תצפיות וידאו.** שלושה דיונים כיתתיים הוקדשו לאירועים מתמטיים (למשל “ריבוע הוא דלתון”). כל מפגש צולם ברצף ותומלל במלואו. התמלילים שימשו לאיתור רגעים שבהם הסטודנטים עברו מהסתמכות על דימוי ויזואלי לפרשנות פורמלית של הגדרות.

**שאלון מקדים/מסכם.**

1. *מטלה מילולית*: 10 טענות הכלה (לדוגמה “האם מקבילית היא טרפז?”). הנחקרים סימנו כן/לא/לא-בטוח וכתבו נימוק חופשי. (נספח 3)
2. *מטלה ויזואלית* : עשר צורות, פעם אחת במנח פרוטוטיפי ופעם נוספת בהטיות וסיבובים. עבור כל צורה דיווחו האם היא ריבוע, מלבן, מקבילית, דלתון או מעוין, והסבירו את בחירתם.
 המטלות נבנו על בסיס הצעות מן הספרות (Haj-Yahya & Hershkowitz, 2013) והושלמו בידי החוקרים. התרגום לערבית נעשה באותו נוהל של חלק א, כולל תרגום לאחור ופיילוט קטן לאימות בהירות הפריטים. (נספח 4)

 תשובות השאלונים הוצלבו עם האופן שבו הטענות עצמן נדונו במליאה: אם סטודנט “תיקן” במפגש מאוחר טענה שבה שגה בשאלון הקדם, נבדקה דרך הנימוק כדי לאשש שהשינוי נבע מהבנה מושגית ולא מהנחיה חיצונית.

שילוב התצפיות האיכותניות עם המדדים הכמותיים שבשאלונים בשני החלקים אפשר לקבל תמונה רב-ממדית של התקדמות הסטודנטים: מצד אחד שינוי בהצלחה בזיהוי ובהגדרה, ומן הצד השני שינוי בלשון ההצדקה ובדינמיקה של שיח טיעוני.

הליך המחקר

המחקר בשני חלקיו התנהל בשלושה שלבים דומים לשתי הקבוצות. בשלב הראשון נאסף מידע בסיסי באמצעות שאלון מקדים אינדיבידואלי, שאִפשר למפות את הידע ההתחלתי של המשתתפים במושגים הנדונים (אלכסון ויחסי־הכלה). בשלב השני התקיים רצף ההוראה–למידה: בכל מפגש נידון אירוע מתמטי רלוונטי, הדיון הכיתתי צולם בווידאו ותומלל במלואו לשם ניתוח טיעונים ודפוסי השתתפות. השלב השלישי כלל העברת שאלון מסכם זהה במבנה לשאלון הקדם, במטרה לבחון שינויים בהבנה ובהצדקה. שלושת השלבים התקיימו במקביל בשני שדות המחקר—קבוצת האלכסון וקבוצת יחסי־הכלה.

ניתוח ועיבוד נתונים

1. תצפיות: התצפיות נותחו בשני שלבים. השלב הראשון יתבסס על מודל הטיעון של טולמין (Toulmin, 1969, 2003), ויתחיל בבניית יומן טיעונים, אשר יתבסס על צפייה בכל דיוני המליאה שיתרחשו בכיתה והדגשת הדיונים בכל פעם שהמשתתפים מסיקים בהם מסקנות. מסקנות אלה סומנו, נאספו ואורגנו על-פי מרכיבי מודל הטיעון: נתונים, טענה, הצדקה, תימוכין, התנגדות והסתייגות.

2. משימות שאלון המסכם: הניתוח התבסס על ניתוח תוכן תמטי (Braun & Clarke, 2006) במחקר א' בהתבסס על הקטגוריות שעלו במחקרם של צמיר ועמיתיה (Tsamir et al., 2015) לגבי הגדרת מושגים גיאומטריים. כל הגדרה תיבחן לפי הממדים הבאים: הכלת התכונות הקריטיות, תכונות מספיקות, הגדרה מינימלית או מורחבת, אילו תכונות קריטיות נוספו, ואילו תכונות לא קריטיות נוספו. לגבי נכונות ההגדרה, נתבסס על ההגדרות המוצגות באתר משרד החינוך שהיוו בסיס לעבודתם של צמיר ועמיתיה (Tsamir et al, 2015). ובמחקר ב' בהתבסס על הקטיגוריות שהוצגו ע"י חאג' יחיא והרשקוביץ (Haj-Yhaya & Hershkowitz, 2013) ועוד קטגוריות אחרות שצמחו מתוך הניתוח.

בהתבסס על הניתוח, נבנו טבלת שכיחויות של תשובות המשתתפים בכל הקטגוריות, טבלת שכיחויות המתארת את אחוזי ההצלחה של התלמידים בזיהוי צורות של המושגים מתוך כל קטיגוריות ההגדרות שהתקבלו, ולטבלה המציגה שכיחויות זיהוי נכון או לא נכון בהתבסס על מחוון החוקרים. ניתוח הנתונים הנגזרים משלושת כלי המחקר בוצע ע"י כל חוקר בנפרד בתהליך איטרטיבי בהתבסס על השיטות שהוסברו לעיל. בתום הניתוח נערכה השוואה בין ממצאי הניתוחים של החוקרים. במקרה של שוני בין תוצאות הניתוחים, יתקיים דיון.

תוכנית ההתערבות- אירועים מתמטיים

**תוכנית ההתערבות** במרכזה של שתי קבוצות המחקר עומד עיצוב רצף אירועים מתמטיים המשלב הצגת טענות מנוגדות, ניתוח קונפליקטים מושגיים ושיח טיעוני בכיתה.

במחקר א’ (מושג האלכסון) חולקו שני אירועים מרכזיים למספר חלקים: בכל חלק הוצג קטע “טעון” כנקודת זינוק—למשל טענה שהקטע החיצוני במצולע אינו אלכסון—ואתגר את ההגדרה הפורמלית. הסטודנטים הוזמנו להתבונן בתצוגות חזותיות שונות של אלכסונים (פנימיים, חיצוניים, חוצים צלעות) ולהתעמת עם ההגדרה “קטע המחבר שני קודקודים שאינם סמוכים”. בכל מפגש החוקרת הראשית הדריכה את הדיון, שאפה להבליט את תכונות הליבה של האלכסון, עודדה ניסוח טיעונים מבוססי הגדרה וביסוס גיבוי ראייתי, ויצרה הזדמנויות לניתוח והתייחסות לטעות כשהיא עולה בדיון. דוגמא לאירוע באיור 1





איור 2. אירוע מתמטי באלכסון

במחקר ב’ (יחסי־הכלה בין מרובעים) הועמדו בשלושה מפגשים שלושה “אירועים” סביב טענות יסוד: “ריבוע הוא מלבן”, “ריבוע הוא דלתון” ו-“מלבן הוא מקבילית”. בכל מפגש הוצגה טענה פרובוקטיבית שהתבססה על טעות פרוטוטיפית, והסטודנטים נתבקשו לפרק אותה: לזהות את המאפיינים הקריטיים המפרידים בין הצורות, להציג נימוקים פורמליים ולנתח מדוע התבנית הוויזואלית המיידית מטעה. האירועים פותחו בהשראת ממצאים מקבוצות מחקר קודמות (Tsamir et al., 2008; Okazaki & Fujita, 2007; Zeybek, 2018) ונועדו להעמיק את המעבר מהסתמכות על “מה שנראה” להבנה מושגית מבוססת הגדרה. דוגמא לאירוע מתמטי באיור 3.



איור 3 . אירוע מתמטי ביחסי-הכלה

**סוגיות אתיות והבטחת זכויות המשתתפים**

המחקר הוא מחקר פעולה, שבו החוקר בודק את תהליך ההוראה-למידה במסגרת קורס שהוא מלמד. במטרה להבטיח את זכויות המשתתפים במחקר, הם קבלו מהחוקר הסבר מלא על מטרות המחקר, מהלכו והתועלת תוך הדגשת האפשרות לפרוש מהמחקר בכל עת ללא מתן הסבר. המשתתפים נתנו את הסכמתם בכתב, והובהר להם שאין קשר בין השתתפותם במחקר לבין ציונם בקורס. תיעוד ההשתתפות בתהליך ההוראה-למידה וצילום המהלכים התבצע בהסכמה מפורשת של המשתתפים. בנוסף, התיעוד נערך בלי לחשוף את פני המשתתפים. כל השאלונים והסרטים המצולמים נשמרים בארון נעול שהגישה אליו תינתן רק לחוקרים, ולא מסר כל פרט מזהה הנוגע למשתתפים בכל דיווח על ממצאי המחקר. כל מידע אישי לא רלוונטי יוסר מממצאי המחקר. כל תמלולי השיח היה דרך שימוש בשמות בדויים וזהותם של המשתתפים לא נחשפה. המחקר ותוצאותיו שמשו רק לצורכי המחקר בלבד. מובן שללא רשות המחקר במוסד הנבחר למחקר – לא התקיים מחקר זה. כמו כן, דוח המחקר לא יכלול פרטים על המשתתפים או על המוסד המשתתף.

ממצאים

פרק זה נדווח בהתחלה על ממצאי מחקר א' ואחר כך נציג ממצאי מחקר ב'

# ממצאי מחקר א' - הגדרת האלכסון

הממצאים הנגזרים מהשאלון המקדים מצביעים שחלק מהמשתתפים אינו יכול לזהות את האלכסון, בנוסף גם מאלה המצליחים לזהות את האלכסון עדיין לא מצליחים לקשר בין ההגדרה הפורמלית לבין דוגמאות לא טיפוסיות של אלכסון. טבלה 2 מתארת תשובות המשתתפים ונימוקיהם.

**טבלה 2.**

 תשובות המשתתפים לזיהוי האלכסונים ונימוקיהם לשינוי בהגדרת האלכסון

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| אירוע | המשתתפים שהסכימו עם התלמיד | אחוז המשתתפים שהציעו הרחבת\שינוי ההגדרה | דוגמאות מתשובות המשתתפים לשינוי ההגדרה |
| אירוע א': התלמיד קבל הגדרת האלכסון "קטע מחבר בין שני קודקודים שאינם סמוכים במצולע" והוא נדרש להחליט אם הקוו האדום הינו אלכסון או לא.התלמיד בחר שהקוו האדום אינו אלכסון, והסביר: כי הוא מחוץ למצולע.  | 33% | 50%רובם דרשו הצורך בהשלמת ההגדרה, ולהתייחס למיקום הקטע. הן טוענות כי צריך לרשום בהגדרה שיש שתי אפשרויות למיקומו של האלכסון: (א) מוכל במצולע (ב) או מחוץ למצולע. | "הייתי משנה את ההגדרה.."  "האלכסון הוא קטע ישר בתוך המצולע…" "..האלכסון חייב לעבור בתוך המצולע ולא מחוץ לו…" "התלמיד התבסס על ההגדרה, אך הקוו שבתמונה הוא מחוץ לצורה.." |
| אירוע ב': התלמיד קיבל הגדרת האלכסון כ-"קטע מחבר בין שני קודקודים שאינם סמוכים במצולע" והוא נדרש להחליט אם הקוו האדום הוא אלכסון.התלמיד בחר שהקוו האדום אינו אלכסון, והסביר: . כי הוא ”ישר“. | אין | 26% מהמשתתפים הציעו להרחיב את ההגדרה ולהוסיף שהקטע צריך להיות ישר.ו-48% מהמשתתפים לא התייחסו בכלל שהתלמיד לא מבין שאין קשר בין ההחלטה שלו שהקטע הוא אכן אלכסון או לא, לבין כיוון הקטע עצמו (אנכי או אפקי או כל כיוון אחר). משתתפים אלה לא מבדילים בין תכונה קריטית לבין תכונה שאינה קריטית לאלכסון. | "ההגדרה חסרה, אני אוסיף עוד להגדרה"  "הייתי מנסחת מחדש את ההגדרה.."  |

הגדרת אלכסון: לפני ואחרי ניתוח האירועים

בטבלה 3 שלהלן מוצגות הגדרות אלכסוני מצולעים שעלו מתוך שאלוני מקדים ומסכם, יחד עם דוגמאות מייצגות להגדרות שהעניקו המשתתפים.

**טבלה 3.**

הגדרות נכונות ושגויות של אלכסון במצולע

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|   | סיווג ההגדרה | דוגמה להגדרה | שאלון מקדים | שאלון מסכם |   |
| הגדרות נכונות | מינימלית | “קטע המחבר כל שני קדקודים שאינם סמוכים במצולע.” | – | 13 (57%) |   |
| לא מינימלית | “קטע המחבר כל שני קדקודים שאינם סמוכים. האלכסון עשוי להיות פנימי לחלוטין, חיצוני לחלוטין, או חלקו פנימי וחלקו חיצוני.” | – | 7 (30%) |   |
| הגדרות שגויות | חסרה תכונה קריטית | • “קטע בתוך המצולע.”• “קטע המחבר שני קדקודים (ללא ציון שאינם סמוכים).” | 13 (57%) | 2 (9%) |   |
|  מבוססות על תכונה לא־קריטית | • “קו שמחלק את הצורה לשני חלקים שווים.”• “קו החוצה את המצולע.” | 10 (43%) | 1 (4%) |   |

ניתן לראות כי בכל תשובות השאלון המקדים ניסחו המשתתפים הגדרות שגויות: 57% מהם מסרו הגדרה שאינה מציינת “קודקודים שאינם סמוכים” (הגדרה חסרה), ו-43% מהם הוסיפו תכונות לא־קריטיות כגון “פנימי בתוך המצולע”, “חוצה את המצולע” או “מחלק את הצורה לשני חלקים שווים”, מה שמעיד על תמונת־מושג מצומצמת שבה האלכסון נתפס רק בתוך המצולע.

ממצאי השאלון המסכם מצביעים על שיפור ניכר: 87% ניסחו הגדרה נכונה (מינימלית או לא־מינימלית), מתוכם 57% כתבו הגדרה מינימלית שכללה את התכונה הקריטית “קטע המחבר שני קודקודים שאינם סמוכים”, ו-30% נוספו הגדרות לא־מינימליות שהרחיבו את תמונת־המושג עם מאפיינים של “פנימי לחלוטין” או “חלקו פנימי וחלקו חיצוני”, מה שמרמז על שינוי בתמונת־המושג של האלכסון.

התפתחות ההגדרה של האלכסון והקשר לדימוי המושג

הדיונים הקולקטיביים וההשתתפות בניתוח אירועים המבוססים על דוגמאות אלכסונים לא־פרוטוטיפיות סייעו להבנת ההגדרה הפורמלית של אלכסון. האירוע, שתוכנן תחילה סביב דוגמאות פרוטוטיפיות, עורר טענות שונות כפי שמוצג בטבלה 2 בנוגע להגדרת האלכסון. הטענות שעלו ממורי העתיד מראות כי אף על פי שההגדרה הפורמלית הוצגה בפניהם לאורך המפגש, לא תמיד היו מודעים לפער בין הדימוי האינטואיטיבי של האלכסון לבין ההיבט האנליטי שנובע מההגדרה. עם זאת, במהלך השיח הטיעוני זיהו המורים אילו תכונות קריטיות מרכיבות את ההגדרה ואילו תכונות יש לשלול. העדות לחשיבות תהליך זה היא בטענה האחרונה שעלתה במפגש, שבה הוסכם על הצורך לבדוק את כל התכונות הקריטיות המופיעות בהגדרה. תהליך זה ממחיש את הקשר הדינמי בין תמונת־המושג לבין ההגדרה הפורמלית שלו.

טבלה 4.

**טיעונים שעלו במהלך ניתוח אירועים מתמטיים**

|  |  |
| --- | --- |
| מספר | כותרת הטיעון |
| 1 | הגדרת האלכסון אינה שלמה |
| 2 | הגדרת האלכסון היא שלמה (הפרכת טענה 1) |
| 3 | קטע המחבר שני קודקודים במצולע הממוקם כולו מחוץ למצולע איננו אלכסון |
| 4 | מספר האלכסונים במרובע קעור הוא שניים |
| 5 | מספר האלכסונים המקשרים קודקודים סמוכים במרובע קעור |
| 6 | מיקומי כל האלכסונים בשמונה־צלעי קעור המקשרים קודקודים לקודקודים אחרים במצולע |
| 7 | קטע המחבר קודקוד לנקודה על צלע איננו אלכסון |
| 8 | קטע המחבר שני קודקודים הכלוא כולו בתוך המצולע הוא אלכסון |
| 9 | קטע החותך צלע אינו אלכסון |
| 10 | קטע החותך צלע הוא אלכסון (הפרכת טענה 9) |
| 11 | קטע החלקו בתוך המצולע וחלקו מחוצה לו נקרא אלכסון |
| 12 | כיוונו של קטע המחבר שני קודקודים סמוכים במצולע אינו תכונה קריטית לאלכסון |

נבחרה אפיזודה אחת. השורות הנבחרות מהאפיזודה מוצגות באפיזודה 1 להלן:

אפיזודה 1: מספר האלכסונים במרובע קעור

1. מרצה: כמה אלכסונים יש במצולע שמולכם? 
2. סינה: יש עוד אלכסון באמצע — מקודקוד 1 אל קודקוד 4. 
3. מרצה: אז, כמה אלכסונים יש במצולע?
4. ריווא: יש רק אלכסון אחד.
5. מרצה: מדוע?
6. ריווא: לפי ההגדרה?
7. מרצה: מה הסקת מההגדרה?
8. ריווא: האלכסון היחיד הוא זה שמחבר את קודקוד 1 עם קודקוד 4.

 24. מרצה: מהם זוגות הקודקודים הסמוכים במצולע?
 25. ריווא: 2 ו-4… 4 ו-3.
 26. מרצה: האם אלה כל זוגות הקודקודים הסמוכים?
 27. כל המשתתפים: לא.
 28. מרצה: ריווא, בבקשה…
 29. ריווא: אההה… 2 ו-4, 4 ו-3, 2 ו-1, 1 ו-3.
 30. מרצה: מה את מסיקה לגבי קודקודים 1 ו-4? האם הם סמוכים?
 31. ריווא: לא, הם אינם סמוכים.

 32. ריווא: אינם סמוכים — אפשר לחבר ביניהם אלכסון.

 33. מרצה: האם את משוכנעת שהקטע האדום הוא אלכסון?

 34. ריווא: עכשיו כן… כמו שסיג’ל אמרה. יש גם אלכסונים חיצוניים.

הדיון החל בשאלה: כמה אלכסונים יש במצולע שמולכם? [1]. הטענה הועלתה על ידי ריווא [4]. במונחים של מודל טולמין, ניתן לפרק את טענת ריווא כך:

טיעון 4: מספר האלכסונים במרובע קעור הוא שניים [2–8]

טענה 1: יש רק אלכסון אחד [4]


נתון 1: “יש עוד אלכסון באמצע — מקודקוד 1 אל קודקוד 4.” [2]

הצדקה 1: לפי ההגדרה [6]
הצדקה 2: “האלכסון היחיד הוא זה שמחבר את קודקוד 1 עם קודקוד 4.” [8]
בהמשך הועלתה על־ידי ריווא טענה נוספת בנוגע לזוגות הקודקודים הסמוכים:

טיעון 5: מספר האלכסונים המקשרים קודקודים סמוכים במרובע קעור [1–33]

טענה 1: הקודקודים 2 ו-4, ו-4 ו-3 הם סמוכים [25]


**נ**תון 1: “כמה אלכסונים יש במצולע שמולכם?” [1]
הצדקה 1: הקודקודים 2 ו-1, ו-1 ו-3 הם סמוכים [29]
הצדקה 2: הקודקודים 1 ו-4 אינם סמוכים [31]
הצדקה 3: הקודקודים 3 ו-2 אינם סמוכים — ניתן לחבר ביניהם אלכסון [33]

הממצאים מראים טיעונים משתי רמות שונות: (א) בסיסית – הטיעון הכיל "נתונים" ו"טענה", או/גם "הצדקה" אחת; (2) מורחבת – הטיעון כולל את הרמה הבסיסית ו"התנגדות" אחת לפחות ו/או "הסתייגות" אחת לפחות ו/או מספר "הצדקות". איור 4 מדגים את התמודדות המשתתפים בטיעון הרביעי בטבלה 4 המתייחס למספר האלכסונים במרובע קעור.



איור 4. תהליך התמודדות בטיעון לגבי אלכסונים במורבע קעור

מתוצאות טיעון 4 עולה שריווא לא זיהתה תחילה את האלכסון החיצוני כאלכסון, למרות קריאת ההגדרה, ומשכה אותו מתוך מערך הדוגמאות הנכונות. תוך כדי הדיון, בטיעון 5, התברר כי הייתה לה תמותה בהבנת “קודקודים סמוכים” ולכן המשיכה להכחיש את קיומו של האלכסון החיצוני. לאחר שהובהרו לה המושגים “קודקודים סמוכים” ו“קודקודים שאינם סמוכים”, הצליחה להכיר בכִּתּוּב הנכון של האלכסון החיצוני. בהמשך מספר משתתפים נוספים הסכימו איתה [33], מה שמעיד על הסכמה נורמטיבית שהתבססה בשלב זה והשיקה הבנה משותפת לגבי העובדה: “אם הקודקודים אינם סמוכים, ניתן לחבר ביניהם אלכסון.”

# ממצאי מחקר ב'

הממצאים מצביעים על שינויים משמעותיים בהבנת המשתתפים ובזיהוי יחסי-הכלה בין צורות—בייחוד ריבועים, מעויינים, מלבנים, מקביליות ודלתונים—גם במשימות מילוליות וגם במשימות ויזואליות שבוצעו לפני ההתערבות ואחריה. נרשם שיפור בולט ביכולתם להכיר ולנמק יחסי-הכלה, מעבר מהבנה צרה ופרוטוטיפית לתפיסה רחבה ומכלילה יותר של צורות גאומטריות. להלן פירוט השינויים והתקדמות המשתתפים בהבנת ההיררכיה של הצורות ובאופן ההסבר שלהם.

בממצאים להלן נביא דוגמאות מהמשימה המילולית ודוגמאות מהמשימה הוויזואלית. הממצאים במשימה המילולית (ראו **טבלה 5**) מראים מעבר בולט מזיהוי שגוי לזיהוי נכון. בתחילה התבססו שיפוטי המשתתפים על תכונות לא-קריטיות הייחודיות לדוגמאות פרוטוטיפיות. לאחר ההתערבות נימוקיהם נשענו על הגדרות פורמליות של הקבוצה המכילה, הסבר מפורש איך קבוצה אחת כלולה באחרת, או הבנה שהתכונות של צורה אחת מוכלות במלואן בתכונות צורה אחרת.

### טבלה 5.

###  דוגמאות לזיהוי יחסי־הכלה – המשימה המילולית

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| טענה | מקדים– מספר מקבלים ונימוק לדוגמה | מסכם– מספר מקבלים ונימוק לדוגמה |
| הריבוע הוא מלבן | 4 נימוק: “במלבן זוג צלעות אחד ארוך מהשני.” | 17נימוק: “תכונות המלבן כלולות בתכונות הריבוע.” |
| המלבן הוא מקבילית | 11 נימוק: “למלבן זוויות ישרות, במקבילית לא.” | 17נימוק: “למלבן כל תכונות המקבילית.” |
| הריבוע הוא דלתון | 2 נימוק: “בצידי דלתון לא כל הצלעות שוות.” | 14 נימוק: “הריבוע הוא דלתון בעל ארבע צלעות שוות.” |

חל גם שיפור ניכר בזיהוי דוגמאות לא-פרוטוטיפיות במשימה וויזואלית, כגון ריבועים כמלבנים, מקביליות או דלתונים, וכן בזיהוי מלבנים כמקביליות (ראה טבלה 6).

### טבלה 6.

###  זיהוי יחסי־הכלה – המשימה הוויזואלית

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| צורה (קוד) | שאלון | זוהה כריבוע | זוהה כמלבן | זוהה כמקבילית | זוהה כדלתון |
| א | מקדים | 20 | 7 | 3 | 0 |
| מסכם | 20 | 20 | 18 | 19 |
| ב | מקדים | 9 | 2 | 0 | 1 |
| מסכם | 20 | 20 | 15 | 18 |
| ג | מקדים | 2 | 10 | 7 | 0 |
| מסכם | 0 | 20 | 19 | 0 |
| ד | מקדים | 2 | 20 | 3 | 0 |
| מסכם | 0 | 20 | 18 | 0 |

### הניתוח של הנתונים המוצגים לעיל מראים כי זיהוי יחסי-הכלה בין מרובעים השתפר במבחן מסכם. אך השיפור לא רק עבור יחסים שנדונו במהלך המפגשים, אלא גם עבור כאלה שלא נדונו כלל. ראה טבלה 7. להלן:

**טבלה 7.**

 ממצאים מסכמים מהמשימה המילולית

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| נימוק נכון | נימוק שגוי |   |   |   |   |
| תכונות קריטיות משותפות / יחסי הכלה בין תכונות קריטיות | הגדרה פורמלית | שימוש בתכונות לא קריטיות / התייחסות לדוגמאות אב טיפוסיות | דחיית טענה / ללא תגובה | קבלת טענה | שאלון | הטענה |
| 3 | 7 | 7 | 8 | 12 | מקדים | המעוין הוא מקבילית |
| 9 | 9 | 0 | 0 | 20 | מסכם |
| 2 | 0 | 9 | 17 | 3 | מקדים | המעוין הוא דלתון |
| 14 | 4 | 1 | 1 | 19 | מסכם |
| 3 | 1 | 14 | 13 | 7 | מקדים | הריבוע הוא מקבילית |
| 10 | 9 | 1 | 1 | 19 | מסכם |
| 3 | 1 | 7 | 13 | 7 | מקדים | הריבוע הוא מעוין |
| 13 | 6 | 0 | 1 | 19 | מסכם |

מהנתונים המוצגים בטבלה 7 מגלים שיפור משמעותי בזיהוי המוצלח של יחסי-הכלה בין מרובעים, גם כאשר יחסים אלה לא נדונו במהלך שלושת המפגשים. שיפור זה מקבל חיזוק נוסף מתוצאות השאלון המסכם, שבהן נצפתה ירידה במספר המשתתפים שהתבססו בזיהויים על תכונות לא קריטיות או על ייחוס לדוגמאות פרוטוטיפיות. בנוסף, בשאלון מסכם, יותר משתתפים הסתמכו על הגדרות פורמליות או על תכונות קריטיות – בין אם תכונות משותפות ובין אם יחסי-הכלה בין הצורות. מגמות אלו מצביעות על שיפור בהבנת המשתתפים את הקשרים בין צורות שונות במשימות וויזואליות מגוונות.

### זיהוי יחסי־הכלה באמצעות ניתוח אירועים מתמטיים

הדיון באירועים מתמטיים תרם להתפתחות ההבנה והנמקת היחסים. להלן **אפיזודה 2**(בחרנו קטע אחד לצורך הדגמה). המתארת את התפתחות הדיון על יחסי-הכלה בין ריבוע ודלתון, תוך דגש על מאפיין משותף האלכסון הראשי מאונך לאלכסון המשני.

אפיזודה 2: האלכסונים מאונכים זה לזה (התכונות המשותפות בין דלתון לריבוע)

1 רימה: אני בטוחה שצורה a (  ) היא דלתון וגם b (  ) דלתון. אבל, אני מתלבטת לגבי הריבוע. () כי המראה שלו שונה.

2 מרצה: מה דעתכם שנבחן אילו תכונות של הדלתון קיימות בצורות אלו, ונבדוק אם הן גם קיימות בריבוע? במיוחד מבחינת האלכסונים. מה דעתכם, מי רוצה להציג בלוח, לנסות לבחון את האלכסונים?

3 סיהאם: אני רוצה לצייר על הלוח ולרשום קו-ישר בין כל הקודקודים הנגדיים שאלה הם האלכסונים... אני אעשה את זה כך, לא משנה אפילו אם זה מחוץ לצורה, אני רוצה להציג לכן את זה [פונה סיהאם ללוח ומציירת את האלכסונים].

4 מרצה: תודה, סיהאם. מה התוצאה שקיבלת מהאלכסונים שציירת?

5 סיהאם: המממ....

6 מאס: האלכסונים מאונכים זה לזה.

7 מרצה: יפה, האלכסונים מאונכים. בואו נבדוק את התכונה הזו על הדף שיש לכן. כל אחד יצייר את האלכסונים בשלושת הצורות ויבדוק אם נוצרו זוויות ישרות?

8 הסטודנטים: מציירים את האלכסונים ובודקים] כן. כולם מאונכים.

9 מרצה: אם כן, מהי התכונה הראשונה של הדלתון שגיליתם?

10 הסטודנטים: האלכסונים מאונכים בשלושתם.

11 מרצה: מה זה אומר שהאלכסונים מאונכים?.

12 רימה: הם יוצרים זווית של..

13 מרצה: נכון, הם יוצרים זווית של 90°. מה עוד אתם רואים לגבי האלכסונים?
 14 דליה: האלכסונים חוצים זה את זה.
 16 דליה: כלומר, אלכסון אחד חוצה את האחר לשני קטעים שווים.
 18 המשתתפים: האלכסון הארוך חוצה את הקצר.

 19 סיהאם: אבל יש לי שאלה. הדלתון שבאמצע אינו כמו האחרים; בכולם אני רואה בבירור את אורכי האלכסונים, אבל בדלתון הזה האלכסון הארוך **אינו** נחצה לשני חלקים (גם אם החלקים אינם שווים).
 20 דליה: זה לא משנה; בעצם זו התכונה המשותפת לכולם.
 22 רימה: כיוון ששני האלכסונים שווים באורך, יוצא שגם לאחר שהם נחתכים במאונך כל הקטעים שווים — כלומר, כל אחד חוצה את האחר.
 24 סיהאם: בצורות האחרות האלכסונים באורכים שונים, ולאחר שנחתכים במאונך מתקבלים קטעים באורכים שונים.
 28 סמה: כי מלכתחילה, לריבוע כל הצלעות שוות.

במהלך הדיון עלו שני טיעונים (טיעון 2 וטיעון 3 ראו איורים 6–5). באירוע שעסק ביחס ההכלה בין ריבוע לדלתון הוצגה טענה על-ידי מאס (ראו איור 2).

מהאפיזודה לעיל, בחרו החוקרים להציג טיעון אחד אשר מראה את השינוי המוצג באיור.



איור 5. טיעון 2,שני אלכסונים מאונכים אחד לשני (תכונה משותפת לריבוע ודלתון)

הטיעון לעיל מתייחס תכונה גיאומטרית משותפת בין ריבוע לדלתון. הטיעון כלל טענה (Claim) שנאמרה על ידי מאס [6] "האלכסונים מאונכים זה לזה", ומבוססת על נתונים ויזואליים שסופקו על ידי סיהאם [3], אשר ציירה על הלוח את האלכסונים של הצורות השונות והראתה את זוויות המפגש ביניהם כמאונכות. הנתונים הללו מדגימים באופן חזותי את הטענה. ההצדקה (Warrant) לטענה ניתנת גם על ידי אותה סטודנטית סיהאם [3] באמצעות ההסבר המילולי שסיפקה: "אני רוצה לצייר על הלוח ולרשום קו-ישר בין כל הקדקודים הנגדיים שאלה הם האלכסונים...". הסבר זה מחבר בין הנתונים שהוצגו לבין הטענה, בכך שהוא מתאר את הפעולה הגיאומטרית הנדרשת לבדיקת מאונכות האלכסונים. בכך, הטיעון משתמש בשילוב של נתונים ויזואליים והסברים מילוליים כדי לבסס את התכונה המתמטית הנידונה ולהוכיח את נכונותה. במילים אחרות, ניתן לסכם כי איור 5 מתאר תהליך שבו המשתתפים מזהים את התכונה הקריטית של אנכיות האלכסונים במעוינים פרוטוטיפים ולא-פרוטוטיפים. דרך הצגת הנתונים, בחינתם והסקת המסקנה כי אנכיות היא תכונה משותפת לריבוע ולדלתון, הם מסיקים כי מדובר בתכונה חשובה המשותפת לשתי הצורות.



איור 6. טיעון 3, אחד האלכסונים חוצה את השני

איור 6 ממחיש כיצד המשתתפים מגיעים למסקנה שבְּריבוע ובדלתון אלכסון אחד חוצה את רעהו. הצגת הנתונים והנימוקים המתאימים מובילה אותם להבנה שמדובר בתכונה משותפת וחשובה לשתי הצורות, הדלתון והריבוע. מכאן הם מסיקים שלריבוע יש את תכונות-הדלתון. בשורות 19–23 ניכר שמשתתפים דנו בשאלה מה הופך את הריבוע למקרה פרטי של דלתון, וכך התקדמו בהבנת יחסי-ההכלה בין דלתונים לריבועים. למרות שהריבוע איננו דוגמה פרוטוטיפית של דלתון, התכונה המשותפת — אלכסון אחד חוצה את האחר — ממשיכה להתקיים.

דיון

מטרת מחקר א' הייתה לבדוק כיצד סטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א'-ב' בעתיד, מגדירים את מושג האלכסון במצולעים ומהו דימוי המושג שלהם לגבי האלכסון. לאחר דיון באירועים מתמטיים הקשורים במושג האלכסון, רצינו לבדוק האם הסטודנטים המתכשרים להוראה מדייקים את הגדרתם למושג האלכסון והאם דימוי המושג שלהם מתפתח כך שיכלול גם דוגמאות לא פרוטוטיפיות.

ממצאי שאלון הקדם הראו שהמשתתפים הצליחו לזהות רק דוגמאות פרוטוטיפיות של אלכסונים, והתקשו לזהות דוגמאות לא-פרוטוטיפיות. קושי זה נבע, בין היתר, מהשתת תכונה לא-קריטית המאפיינת את הדוגמאות הפרוטוטיפיות— “האלכסון חייב להיות משורטט כולו בתוך המצולע” — ממצא התואם מחקרים קודמים על קטעי גובה ומשיק (Gutiérrez & Jaime, 1999; Haj-Yahya, 2020). בנוסף, רוב המשתתפים נתנו הגדרות שגויות: הם הזכירו תכונות לא-קריטיות המאפיינות את הדוגמאות הפרוטוטיפיות (“מחלק את הצורה”, “חוצה את המצולע”) או השמיטו תכונות חיוניות כגון “קודקודים שאינם סמוכים”. נראה כי הסתמכו על דימוי-המושג האישית המוגבל במקום על ההגדרה הפורמלית (Berenger, 2018; Tsamir et al., 2014). לאחר ההתערבות חל שיפור ניכר: 87 % ניסחו הגדרה נכונה, מהם 57 % במינימום תנאים הכרחיים (“קטע המחבר שני קודקודים שאינם סמוכים”) ו-30 % הוסיפו הרחבות לא-מינימליות (למשל “אלכסון עשוי להיות חיצוני חלקית”), המעידות על הרחבת דימוי-המושג. כשמציבים בפני הלומד דוגמאות לא-פרוטוטיפיות, הדימוי האישי מתקרב להגדרה הרשמית (Tall & Vinner, 1981).

במהלך הדיון באירועים המתמטיים הקשורים במושג אלכסון בכיתה ניכר מעבר מרמה 2 לרמה 3 במודל ואן־היילה: המשתתפים קישרו בין תכונות, זיהו מבנה לוגי ופעלו על-פי יחסים הכרחיים-ומספיקים, מה שהעמיק את הבנתם את מושג האלכסון. שיעור שימוש בתכונות לא-קריטיות בהגדרות של סטודנטים קטן מכ-40 % במבחן לפני ההתערבות לכ-10 % במבחן אחרי ההתערבות, נתון התואם מחקרים המדגישים את יחסי הגומלין בין תמונת-מושג להגדרה (Fujita & Jones, 2007). ממצא ייחודי הוא ריבוי ההגדרות הלא-מינימליות במבחן אחרי: המשתתפים השתמשו בתכונות שמופיעות רק בדוגמאות לא-פרוטוטיפיות (כמו: האלכסון יכול להיות חיצוני), גם כדי למנוע שגיאות עתידיות של תלמידיהם. בכך “הרשימה הארוכה” – שלעתים נחשבת חסרון בהגדרות (Leikin & Winicky-Landman, 2001) – הפכה לכלי להרחבת תמונת-המושג. הניתוח האיכותני באמצעות מודל טולמין (Toulmin, 2003) חשף טיעונים לקויים – טענות חסרות ו-/או הסברים בלתי-מספיקים – והדגיש כיצד משתתפים אחרים הפריכו אותן באמצעות תכונות קריטיות. מנגנון זה של טיעון-נגד (rebuttal) יצר ידע קבוצתי ושיפר את דיוק ההגדרות.

לסיכום: התוצאות של מחקר א' מראות כי, עיסוק באירועים מתמטיים סביב מושג האלכסון התגלה כמועיל במיוחד, הוא העמיק הבנה, יישר קו בין תמונת-המושג להגדרה והעניק לפרחי ההוראה תובנות פדגוגיות לגבי הגדרת המושג אלכסון. מומלץ לחקור אירועים דומים במושגים גאומטריים נוספים, ולחשוף מורים בפועל וסטודנטים לממצאים כדי לצמצם קשיֵ-גאומטריה בהכשרה ובכיתות.

מטרת מחקר ב' הייתה לבחון כיצד דיון של הסטודנטים המתכשרים להוראה בכיתות א' ו- ב' בניתוח אירועים מתמטיים, לצורך פיתוח הבנתם ונימוקיהם הקשורים ביחסי-הכלה בין מרובעים, משפיע על הבנתם את יחסי-ההכלה.

לפני ההתערבות במבחן המקדים רוב המשתתפים התקשו לזהות יחסי-הכלה בין מרובעים שונים הן במשימות הוויזואליות והן במילוליות. כאשר נתבקשו לנמק את תשובותיהם, רובם הסתמכו על תכונות לא קריטיות המאפיינות את הדוגמאות הפרוטוטיפיות או התבססו על הפרוטוטיפ עצמו כנקודת התייחסות במקום להסתמך על הגדרות הצורות והתכונות הקריטיות הקשורות במושג.

הממצאים מלמדים כי הדיון באירועים אלה חשף את הסתמכותם של המשתתפים על תכונות לא-קריטיות המאפיינות את הדוגמאות הפרוטוטיפיות. שימוש בתכונות אלו היה רב באירוע הראשון ופחת יותר כאשר התקדמו לאירוע השני והשלישי. הדרישה להסביר ולתמוך בטענות הובילה אותם להיעזר בהגדרות פורמליות או בתכונות קריטיות, וכך לראות שצורות שונות חולקות תכונות ומשתייכות לקטגוריות רחבות יותר. לדוגמה, כפי שהוצג באפיזודה 1, הדיון התקדם מחוסר-וודאות וויזוואלי ראשוני להשוואה שיטתית בין תכונות דלתון לריבוע; המשתתפים זיהו תכונות קריטיות משותפות והסיקו בסופו של דבר כי לריבוע יש את תכונות הדלתון. תוצאות אלו מתיישבות עם מחקרים קודמים (למשל Stockero et al., 2020) המדגישים את יעילות הניתוח של אירועים מתמטיים. יישום מודל טולמין הדגיש בבהירות כיצד השתנה קו-הנימוק המובנה—הצגת וורנטים וגיבויים—במעבר מאי-הבנה ראשונית להבנה מדויקת ומעודנת יותר של יחסי-ההכלה.

בשאלון אחרי יותר הסטודנטים זיהו נכון את יחסי-ההכלה וסיפקו הסברים המבוססים על הגדרות גאומטריות של המושגים או על תכונות קריטיות שלהם. המגמה של שיפור בזיהוי יחסי-ההכלה התגלה לא רק עבור יחסי-ההכלה שדנו בהם באירועים המתמטיים אלא גם לגבי יחסי-ההכלה שלא נדונו בשלושת האירועים המתמטיים (ראה טבלה 7). ההתערבות, אם כן, תרמה להבנתם את יחסי-ההכלה ולהרחבת דימוי-המושג שלהם מעבר לדוגמאות פרוטוטיפיות (Haj-Yahya et al., 2024). עם זאת, האירועים התמקדו בשלושה יחסי-הכלה בלבד, ולא כל המשתתפים לקחו חלק פעיל בדיונים. אף על פי כן, הממצאים מצביעים על שיפור ניכר בהבנת יחסי-ההכלה אצל מרבית המשתתפים. ניתוח אירועים מתמטיים היה פוטנציאלי לשיפור הבנת יחסי-ההכלה לא רק בקרב המשתתפים הפעילים בדיון ובנוגע ליחסים שנדונו, אלא אף השפיע באופן חיובי על הבנתם של משתתפים שלא לקחו חלק פעיל בדיון באירוע המתמטי עצמו.

 רשימת מקורות

 לוי, ד' (2006). *מחקר פעולה: הלכה ומעשה.* מכון מופ"ת.

מרקוביץ', צ' (2003). *ניתוח אירועים מתמטיים בכיתה*. מכון מופ"ת.

כהן, נ' (2020). לראות, לנתח ומה שביניהם, *מספר חזק 2000*, (31), 28 -45.

Boonen, T., Van Damme, J., & Onghena, P. (2014). Teacher effects on student achievement in first grade: which aspects matter most?. *School Effectiveness and School Improvement, 25*(1), 126-152.<https://doi.org/10.1080/09243453.2013.778297>.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101.

Campbell, P. F., Nishio, M., Smith, T. M., Clark, L. M., Conant, D. L., Rust, A. H.,... & Choi, Y. (2014). The relationship between teachers' mathematical content and pedagogical knowledge, teachers' perceptions, and student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 419-459.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. , & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences, 10*, 113-163.

Flynn, A. E., & Klein, J. D. (2001). The influence of discussion groups in a case-based learning environment. *Educational Technology Research and Development*, *49*(3), 71-86.‏

Fujita, T. and Jones, K. (2006), Primary trainee teachers’ understanding of basic geometrical figures in Scotland. In, Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. and Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME30). (Vol. 3. pp. 129-136).

Haj-Yahya, A. (2021). Students' conceptions of the definitions of congruent and similar triangles. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-25.‏

Haj-Yahya, A., Daher, W., & Swidan, O. (2019). In-service teachers' conceptions of parallelogram definitions. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 12). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.‏

Haj-Yahya, A., & Haj-Yahya, H. A. (2024). Exploring the linguistic factors influencing concept identification. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–26. https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2380249

Haj-Yahya, A., & Hershkowitz, R. (2013). When visual and verbal representations meet the case of geometrical figures. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 2* (pp. 409-416). PME.

Haj-Yahya, A., Hershkowitz, R., & Dreyfus, T. (2022). Investigating students' geometrical proofs through the lens of students definitions. *Mathematics Education Research Journal (MERJ)*. 1-27.

 Herbst, P., Boileau, N., Clark, L., Milewski, A., Chieu, V. M., Gürsel, U., & Chazan, D. (2017). Directing focus and enabling inquiry with representations of practice: Written cases, storyboards, and teacher education. In Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). *Proceedings of the 39th annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education*. (pp. 789-796). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry - two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 61–76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70–95)*.* Cambridge University Press.

Hershkowitz, R., Tabach, M., & Dreyfus, T. (2017). Creative reasoning and shifts of knowledge in the mathematics classroom*. ZDM: The International Journal on Mathematics Education,* *49(1),* 25–36.

Hill, C. H., Rowan, B; Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal Summer*, *42*(2), 371-406.

Jones, K., Mooney, C., & Harries, T. (2002). Trainee primary teachers’ knowledge of geometry for teaching. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *22*(2), 95-100.

Koçak, M., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2017). An Investigation the Pedagogical Content Knowledge of Pre-Service Elementary Mathematics Teachers’ about the Concept of Cylinder. Cukurova University *Faculty of Education Journal, 46*(2), 711-765.

Mammarella, I. C., Caviola, S., Giofrè, D., & Borella, E. (2017). Separating math from anxiety: The role of inhibitory mechanisms. *Applied Neuropsychology: Child. 7*(4), 342-353 doi:10.1080/21622965.2017.1341836.

Marchis, I. (2012). Preservice primary school teachers' elementary geometry knowledge. *Acta Didactica Napocensia*, *5*(2), 33-40.‏

Markovits, Z., & Even, R. (1999). The decimal point situation: A close look at the use of mathematics-classroom-situations in teacher education. *Teaching and Teacher Education, 15*(6), 653–665.‏ [https://doi.org/10.1016/S0742-051X(99)00020-7](https://doi.org/10.1016/S0742-051X%2899%2900020-7)

Markovits, Z., & Smith, M. S. (2008). Cases as tools in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Tools and Processes in Mathematics Education.* Vol. 2, (pp. 39–64). Sense Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA.: NCTM, 2000.

Okazaki, M. (2013). Identifying situations for fifth graders to construct definitions as conditions for determining geometric figures. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* Vol. 3, (pp. 409–416). PME.

Okazaki, M., & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, ( pp. 8-41). PME.

Pavlovičová, G., Bočková, V., & Laššová, K. (2022). Spatial Ability and Geometric Thinking of the Students of Teacher Training for Primary Education. *TEM Journal*, *11*(1), 388.

Peterson, P. L., Fennema, E., Carpenter, T., & Loef, M.(1989). Teachers’ pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction, 6,* 1-40.

Pickreign, J. (2007). Rectangles and rhombi: how well do pre-service teachers know them? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, *1,* 1-7.

Rasmussen, C., & Stephan, M. (2008). A methodology for documenting collective activity. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of innovative design research in science, technology, engineering, mathematics* (STEM) education,195-215. Taylor and Francis.

Rasmussen, C., Wawro, M., & Zandieh, M. (2015). Examining individual and collective level mathematical progress. *Educational Studies in Mathematics, 88*(2), 259-281.*‏*

Shahbari, J. A. (2017). Mathematical and pedagogical knowledge amongst first- and second-grade in-service and pre-service mathematics teachers. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *18*(1), 41-65.

Sharyn, L. & Colleen, V. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(2), 22-43.

Shrestha, R. (2022). Teachersʼ Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge for Teaching: As Preconditions to Develop Studentsʼ Mathematical Thinking at Grade 1-3 in Nepal. *NUE Journal of International Educational Cooperation, 15*, 123-132.

Shulman, L. (1992). Towards a pedagogy of cases. In J. Shulman (ed.), *Case Methods and Teacher Education* (pp. 1-30). Teachers College Press.

Stephan, M., & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 459-490.

Stockero, S. L., Leatham, K. R., Ochieng, M. A., Zoest, L. R., & Peterson, B. E. (2019). Teachers’ orientations toward using student mathematical thinking as a resource during whole‑class discussion*. Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-31.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Taylor, J. A., Roth, K., Wilson, C. D., Stuhlsatz, M. A.& Tipto, E. (2017). The Effect of an Analysis-of-Practice, Videocase-Based, Teacher Professional Development Program on Elementary Students' Science Achievement. *Journal of Research on Educational Effectiveness, 10*(2), 241-271.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E. S., & Barkai, R. (2019). Using theories and research to analyze a case: learning about example use. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(2), 205-225.

Toulmin, S. E. (1969). *The uses of argument*. Cambridge University.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Argument* (2nd ed.). Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511840005

Tsamir, P., Tirosh, D. & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 81-95.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R. & Tabach, M. (2014). Early-years teachers' concept image and concept definition: triangles, circles and cylinders. *ZDM mathematics Education, 47*(3), 1-13.

Tutak, F. A. (2009). A study of geometry content knowledge of elementary preservice teachers: The case of quadrilaterals [Doctoral dissertation, University of Florida]. University of Florida Institutional Repository. <http://etd.fcla.edu/UF/UFE0041186/tutak_f.pdf>

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, 5*, 310–316.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Academic Press.

Van Hiele, P. M. (1959). The child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and* *Pierre M. Van Hiele.* Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education, 243-252.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept image and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). University of California.

Zeybek, Z. (2018). Understanding Inclusion Relations between Quadrilaterals. *International Journal of Research in Education and Science, 4(2), 595-612.*

**נספח 1. שאלון מקדים**

**משימה 1:** כתוב הגדרה מתמטית מקובלת למושג "אלכסון במצולע".

**משימה 2:** כתוב האם הקטע בצבע אדום הוא *אלכסון* או *לא אלכסון* ונמק את בחירתך.



**נספח 2. שאלון מסכם**

**משימה 1:** כתוב הגדרה מתמטית מקובלת למושג "אלכסון במצולע".

**משימה 2:** בהתבסס על המצולע הבא:

**שאלה 1:** כתוב מספר כל האלכסונים היוצאים מהקודקוד P.

**שאלה 2:** שרטט את כל האלכסונים האלה.

 **משימה 3:**

המשימה הבאה ניתנה לתלמידים בהקשר למושג "אלכסון במצולע":

*מוצגים להלן מצולעים שונים.
 עבור כל מצולע, שרטט את כל האלכסונים היוצאים מהקודקוד A*

להלן תשובותיהם של שני תלמידים:

|  |  |
| --- | --- |
| **תלמיד ראשון** | **תלמיד שני** |
|  |  |

**חלק א':**

בהתבסס על שתי התשובות שלמעלה, נתח מה כל תלמיד מבין לגבי מושג האלכסון במצולע.
 במילים אחרות, כתוב את ההגדרה שכל אחד מהם אימץ למושג "אלכסון במצולע".

**חלק ב':**

להלן שני מצולעים חדשים.
 שרטט את כל האלכסונים מהקודקוד A בכל אחד מהם – בהתאם להבנה של כל אחד משני התלמידים למושג האלכסון.



**נספח 3.**

קרא/י כל שאלה ובחר/י את אחת מהתשובות: **כן / לא / לא יודע/ת**.
 לאחר מכן, **נמק/י בקצרה את תשובתך**.

1. **האם ריבוע הוא מלבן?** כן / לא / לא יודע/ת
 נמק/י את תשובתך:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. **האם מלבן הוא מקבילית?** כן / לא / לא יודע/ת
 נמק/י את תשובתך: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
3. **האם ריבוע הוא דלתון?** כן / לא / לא יודע/ת
 נמק/י את תשובתך: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
4. **האם ריבוע הוא מקבילית?** כן / לא / לא יודע/ת
 נמק/י את תשובתך: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
5. **האם ריבוע הוא מעוין?** כן / לא / לא יודע/ת
 נמק/י את תשובתך: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
6. **האם מעוין הוא דלתון?** כן / לא / לא יודע/ת
 נמק/י את תשובתך: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
7. **האם ריבוע הוא טרפז?** כן / לא / לא יודע/ת
 נמק/י את תשובתך: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
8. **האם דלתון הוא מקבילית?** כן / לא / לא יודע/ת
 נמק/י את תשובתך: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
9. **האם מקבילית היא טרפז?** כן / לא / לא יודע/ת
 נמק/י את תשובתך: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
10. **האם מעוין הוא מקבילית?** כן / לא / לא יודע/ת
 נמק/י את תשובתך: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**נספח 4.**

לפניך הצורות הבאות:



רשום את מספרי כל הצורות שהן מקביליות: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

רשום את מספרי כל הצורות שהן מלבנים: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

רשום את מספרי כל הצורות שהן מעוינים: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

רשום את מספרי כל הצורות שהן ריבועים: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

רשום את מספרי כל הצורות שהן דלתונים: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_